الميكانيك والطاقة — الوحدة 04

الطاقة الكامنة

الثقالية · المرونية · الفتلية

الدرس · الملخّص · 19 تمرينا متدرّجا · الحلول المفصّلة

الأستاذ تيبب حكيم

السنة الثانية ثانوي — رياضيات وتقني رياضي

فهرس

المحتويات

الجزء الأول	**الدرس** الجملة القابلة للتشوّه، الطاقة الكامنة الثقالية والمرونية والفتلية، مبدأ انحفاظ الطاقة	3
الجزء الثاني	**ملخّص الدرس** العلاقات الأساسية، طريقة حلّ تمرين في الطاقة، الارتفاعات، الأخطاء الشائعة	13
الجزء الثالث	**سلسلة التمارين** المستوى 1 : تطبيق مباشر (1–6) · المستوى 2 : تثبيت (7–14) · المستوى 3 : تعمّق (15–19)	15
الجزء الرابع	**الحلول المفصّلة** حلّ كلّ تمرين مسبوقا بتوجيه منهجي، مع التنبيه إلى الأخطاء الشائعة	28
	تابعوا الأستاذ المنصّة وقنوات التواصل	49

كيف تستعمل هذا الكتاب ؟

1. اقرأ **الدرس** مع أمثلته المحلولة، ثمّ احفظ **الملخّص** والعلاقات المؤطّرة.
2. أنجز التمارين **بالترتيب** : المستوى 1 ثمّ 2 ثمّ 3، على كرّاسك وقبل النظر في الحلول.
3. عند التصحيح اقرأ أوّلا **التوجيه المنهجي** : هو الطريقة التي تصلح لكلّ التمارين المشابهة.
4. راجع إطارات «**انتبه : خطأ شائع**» : أغلب النقاط الضائعة في الفروض تأتي منها.

الجزء الأول

الدرس

الجملة القابلة للتشوّه · الطاقة الكامنة الثقالية · المرونية · الفتلية · انحفاظ الطاقة

ماذا سأتعلّم في هذه الوحدة ؟

- أعرف أنّ الطاقة الكامنة تخزّنها **جملة قابلة للتشوّه**، وأحدّد الجملة المناسبة لكلّ شكل.
- أعبّر عن **الطاقة الكامنة الثقالية** لجملة (جسم + أرض) وأحسبها، وأعرف أنّها **نسبية** (تتعلّق بالمستوي المرجعي).
- أفرّق بين **عمل قوة الثقل** و**الطاقة الكامنة الثقالية**.
- أعبّر عن **الطاقة الكامنة المرونية** لنابض مرن، وعن **الطاقة الكامنة الفتلية** لسلك فتل، وأحسبهما.
- أطبّق **مبدأ انحفاظ الطاقة** لإيجاد سرعة أو ارتفاع جسم صلب أو تشوّه نابض.

1. الجملة القابلة للتشوّه والطاقة الكامنة

تعريف

نقول عن جملة إنّها **قابلة للتشوّه** إذا تغيّرت المسافات بين أجزائها (بين النقاط المادية المكوّنة لها). عندما تتشوّه الجملة تخزّن طاقة تسمّى **الطاقة الكامنة** E_p، وحدتها **الجول (J)**.

الطاقة الكامنة طاقة **مخزّنة** في الجملة بسبب وضعها أو تشوّهها، ويمكن أن تتحوّل إلى أشكال أخرى (طاقة حركية مثلا) لإنجاز عمل. الجمل الميكانيكية القابلة للتشوّه في برنامجنا ثلاث :

الجملة	التشوّه	شكل الطاقة المخزّنة	الرمز
(جسم + أرض)	تغيّر المسافة بين الجسم والأرض (الارتفاع)	طاقة كامنة **ثقالية**	E_{pp}
(جسم + نابض)	استطالة النابض أو انضغاطه	طاقة كامنة **مرونية**	E_{pe}
(ساق + سلك فتل)	فتل السلك بزاوية	طاقة كامنة **فتلية**	E_{pt}

انتبه : خطأ شائع

الجسم **وحده** لا يملك طاقة كامنة ثقالية : هي طاقة الجملة **(جسم + أرض)**. إذا اخترنا الجسم وحده جملةً فإنّ الأرض تصبح وسطا خارجيا يتبادل معه الطاقة **بعمل قوة الثقل**.

2. الطاقة الكامنة الثقالية

2.1 نشاط 01 : بماذا تتعلّق ؟

نثبّت أجساما مختلفة الكتلة بطرف خيط مطاطي معلّق، نسحب كلّ جسم إلى نفس الموضع **A** ثمّ نتركه، فيصعد إلى ارتفاع أعظمي **h**. في كلّ مرّة يخزّن المطاط **نفس الطاقة الكامنة المرونية**، وتتحوّل كلّها إلى طاقة كامنة ثقالية للجملة (جسم + أرض) في أعلى نقطة :

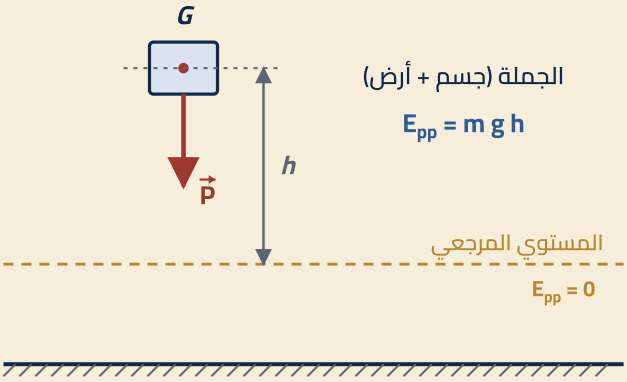
m (g)	1000	800	600	400	200
h (m)	0,15	0,18	0,25	0,37	0,75
m · h (kg·m)	0,150	0,144	0,150	0,148	0,150

الاستنتاج : كلّما زادت الكتلة نقص الارتفاع، والجداء **m·h** ثابت تقريبا. الطاقة الكامنة الثقالية (وهي نفسها في كلّ التجارب) تتناسب إذن مع الجداء **$m \cdot h$** : **$E_{pp} = K \cdot m \cdot h$**، والثابت **K** نعيّنه في النشاط 02.

2.2 نشاط 02 : تعيين الثابت K

نترك كرة تسقط سقوطا حرّا دون سرعة ابتدائية ونصوّر حركتها بالتصوير المتعاقب. الجملة (كرة + أرض) **معزولة طاقويا** (الاحتكاك مهمل)، فما تكسبه من طاقة حركية تخسره من طاقة كامنة ثقالية : **$E_c + E_{pp}$** ثابت. رسم البيان **$E_c = f(h)$** يعطي **مستقيما ميله $-m \cdot K$**، ونجد بالقياس **$K \approx 9{,}8\ N/kg$** : إنّه **شدّة الجاذبية g**.

عبارة الطاقة الكامنة الثقالية

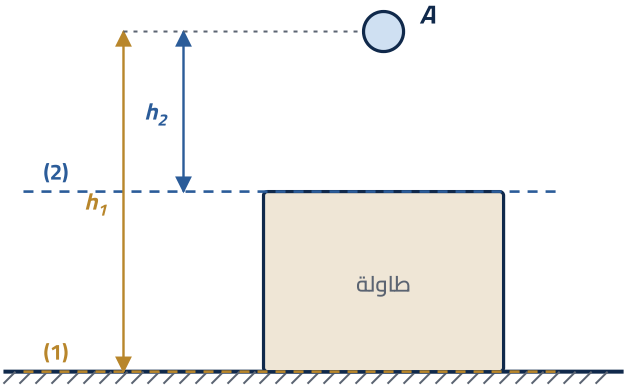


$$E_{pp} = m \cdot g \cdot h$$

- E_{pp} : الطاقة الكامنة الثقالية للجملة (جسم + أرض) بالجول **(J)**.
- **m** : كتلة الجسم بالكيلوغرام **(kg)** ؛ **g** : شدّة الجاذبية **(N/kg)**.
- **h** : ارتفاع مركز عطالة الجسم **عن المستوي المرجعي** بالمتر **(m)** ؛ يكون سالبا إذا كان الجسم تحت هذا المستوي.

2.3 الطاقة الكامنة الثقالية مقدار نسبي

نختار بحرّية **مستويا مرجعيا** نعتبر عنده $E_{pp} = 0$ (سطح الأرض، سطح طاولة، أخفض نقطة في المسار...). قيمة E_{pp} تتعلّق بهذا الاختيار :



نفس الكرة لها طاقة كامنة ثقالية مختلفة بالنسبة للمرجعين (1) و(2)

التغيّر في الطاقة الكامنة الثقالية لا يتعلّق بالمرجع

عندما ينتقل الجسم من الموضع **A** إلى الموضع **B** :

$$\Delta E_{pp} = E_{ppB} - E_{ppA} = m\,g\,(h_B - h_A)$$

وهذا الفرق هو نفسه مهما كان المستوى المرجعي. ونلاحظ أنّ $W_{AB}(\vec{P}) = m\,g\,(h_A - h_B)$، ومنه :

$$\Delta E_{pp} = -\,W_{AB}(\vec{P})$$

عمل قوة الثقل $W(\vec{P})$	الطاقة الكامنة الثقالية E_{pp}
يتعلّق **بانتقال** بين موضعين، ولا يتعلّق بالمرجع	تتعلّق **بموضع** واحد، وقيمتها تتعلّق بالمرجع
يظهر عندما تكون الجملة **(جسم)** : الأرض وسط خارجي	تظهر عندما تكون الجملة **(جسم + أرض)**
موجب عند النزول، سالب عند الصعود	تنقص عند النزول وتزداد عند الصعود

تطبيق 01

كرة كتلتها $m = 0,5\ kg$ موجودة على ارتفاع $2\ m$ من سطح الأرض فوق طاولة ارتفاعها $0,8\ m$.

$g = 10\ N/kg$. أحسب E_{pp} بأخذ سطح الأرض ثمّ سطح الطاولة مرجعا، ثمّ التغيّر ΔE_{pp} عندما تسقط الكرة على الطاولة في الحالتين.

بأخذ سطح الأرض مرجعا :

$$E_{pp} = 0,5 \times 10 \times 2 = 10\ J$$

بأخذ سطح الطاولة مرجعا :

$$E_{pp} = 0,5 \times 10 \times (2 - 0,8) = 6\ J$$

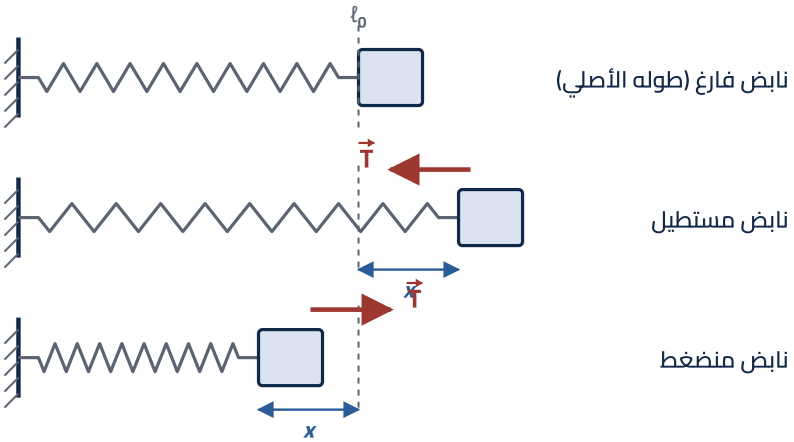
عندما تسقط الكرة على الطاولة (بمرجع الطاولة) :

$$\Delta E_{pp} = 0 - 6 = -6\ J$$

نفس التغيّر $-6\ J$ في المرجعين ($-6\ J = 4 - 10$ بمرجع الأرض)، و$W(\vec{P}) = +6\ J$.

3. الطاقة الكامنة المرونية

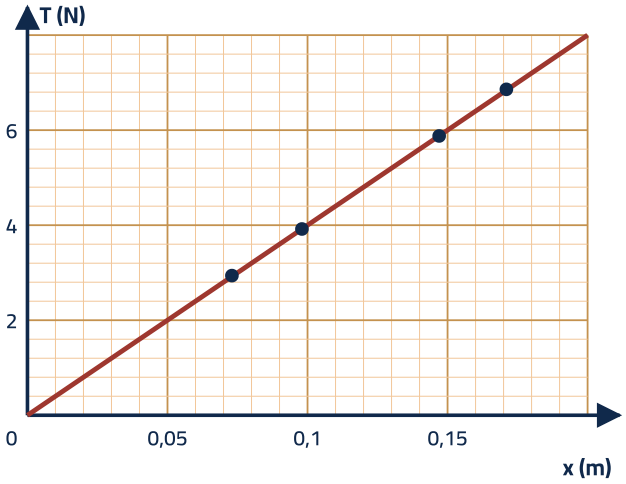
3.1 قوة توتّر النابض (قانون هوك)



x : تغيّر طول النابض (استطالة أو انضغاط) بالنسبة لطوله الأصلي ℓ_0

نعلّق كتلا مختلفة بنابض ونقيس استطالته x عند التوازن، حيث $T = P = m\,g$:

T (N)	2,94	3,92	5,88	6,86
x (cm)	7,3	9,8	14,7	17,1



البيان **T = f(x)** مستقيم يمرّ بالمبدأ

توتّر النابض

$$T = k \cdot x$$

k : **ثابت مرونة** النابض (ميل البيان)، وحدته **N/m**. هنا : **k = 6,86 / 0,171 ≈ 40 N/m**. حامل $\vec{T}$ هو محور النابض، وجهتها **نحو داخل** النابض إذا كان مستطيلا، **ونحو خارجه** إذا كان منضغطا : إنّها تعاكس التشوّه دائما.

3.2 عبارة الطاقة الكامنة المرونية

لنشوّه النابض بالمقدار **x** ببطء يجب أن نؤثّر بقوة تساوي **T = k x** تتزايد من **0** إلى **k x**. عملها يساوي **مساحة المثلّث** تحت البيان **T = f(x)** : $W = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (k\,x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2$. هذه الطاقة يخزّنها النابض :

عبارة الطاقة الكامنة المرونية

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

- E_{pe} بالجول **(J)** ؛ **k** ثابت المرونة بـ **N/m** ؛ **x** الاستطالة أو الانضغاط **بالمتر**.
- E_{pe} موجبة دائما (x^2)، ومنعدمة عندما يكون النابض بطوله الأصلي.

انتبه : خطأ شائع

x هو تغيّر الطول $|\ell - \ell_0|$ وليس طول النابض ℓ، ويُحوَّل إلى المتر قبل التعويض : $x = 5\ cm = 0{,}05\ m$، ومنه $x^2 = 2{,}5\times10^{-3}\ m^2$.

تطبيق 02

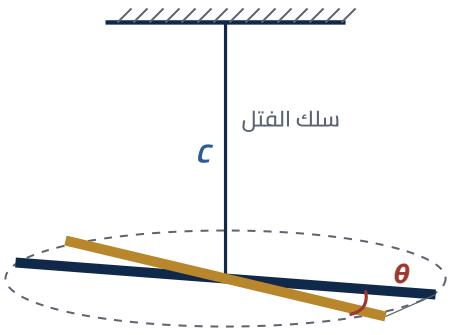
نابض ثابت مرونته $k = 200\ N/m$ طوله الأصلي $\ell_0 = 15\ cm$. أحسب الطاقة الكامنة المرونية وشدّة التوتّر عندما يصبح طوله $\ell = 12\ cm$.

$$x = \ell_0 - \ell = 0{,}03\ m$$

$$E_{pe} = \tfrac{1}{2} \times 200 \times 0{,}03^2 = 9\times10^{-2}\ J$$

$$T = k\,x = 200 \times 0{,}03 = 6\ N$$

4. الطاقة الكامنة الفتلية



الساق في وضع التوازن (داكن) وبعد فتلها (ذهبي)

نواس الفتل : ساق أفقية معلّقة من مركزها بسلك فتل شاقولي

عندما نفتل السلك بزاوية θ حول محوره يؤثّر على الساق بـ**مزدوجة فتل** تعيدها نحو وضع التوازن، وتخزّن الجملة (ساق + سلك فتل) طاقة كامنة فتلية.

الطاقة الكامنة الفتلية ومزدوجة الفتل

$$E_{pt} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \theta^2$$

$$\mathcal{M} = C \cdot \theta$$

- C : ثابت الفتل للسلك بـ $N{\cdot}m/rad$ ، θ : زاوية الفتل بالراديان.
- $\mathcal{M}$: عزم مزدوجة الفتل بـ $N{\cdot}m$ (مقابل $T = k\,x$ في النابض).

تطبيق 03

سلك فتل ثابته $C = 4{\times}10^{-2}\ N{\cdot}m/rad$. نفتله بزاوية $\theta = 90°$. أحسب الطاقة الكامنة الفتلية وعزم مزدوجة الفتل.

$$\theta = \pi/2 \approx 1{,}57\ rad$$

$$E_{pt} = \frac{1}{2} \times 4{\times}10^{-2} \times 1{,}57^2 \approx 4{,}9{\times}10^{-2}\ J$$

$$\mathcal{M} = C\,\theta = 4{\times}10^{-2} \times 1{,}57 \approx 6{,}3{\times}10^{-2}\ N{\cdot}m$$

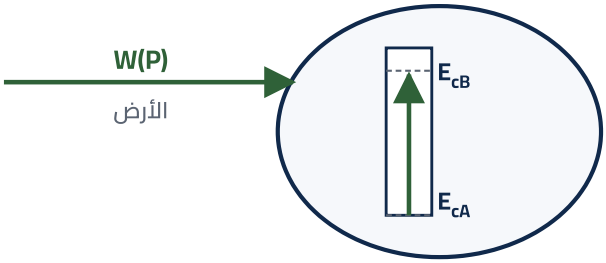
انتبه : خطأ شائع

الزاوية بالراديان دائما : بالدرجات نحصل على $\frac{1}{2} \times 0{,}04 \times 90^2 = 162\ J$ وهي قيمة خاطئة تماما.

5. مبدأ انحفاظ الطاقة والطاقة الكامنة

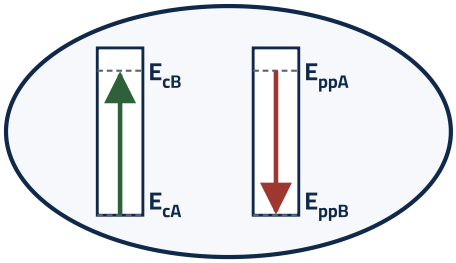
5.1 اختيار الجملة

جسم يسقط من A إلى B دون احتكاك. يمكن أن نصف نفس الظاهرة بطريقتين :



الجملة (جسم)

الجملة (جسم) : الأرض وسط خارجي



الجملة (جسم + أرض)

الجملة (جسم + أرض) : لا تبادل مع الخارج

الجملة (جسم)	الجملة (جسم + أرض)
$E_{cA} + W_{AB}(\vec{P}) = E_{cB}$	$E_{cA} + E_{ppA} = E_{cB} + E_{ppB}$

المعادلتان متكافئتان لأنّ $W(\vec{P}) = -\Delta E_{pp}$. لا نجمع أبدا عمل الثقل وE_{pp} في نفس المعادلة.

انتبه : خطأ شائع

إذا كانت الأرض داخل الجملة فلا نمثّل $W(\vec{P})$ في الحصيلة (الثقل قوة **داخلية**)، وإذا كانت خارجها فلا نكتب E_{pp}. ونفس الشيء للنابض : إذا كان داخل الجملة نكتب E_{pe}، وإذا كان خارجها نكتب عمل قوة التوتّر.

5.2 الطاقة الميكانيكية

معادلة انحفاظ الطاقة

لجملة تخزّن طاقة حركية وطاقة كامنة، بين موضعين **1** و**2** :

$$E_{c1} + E_{p1} + W_{ext} = E_{c2} + E_{p2}$$

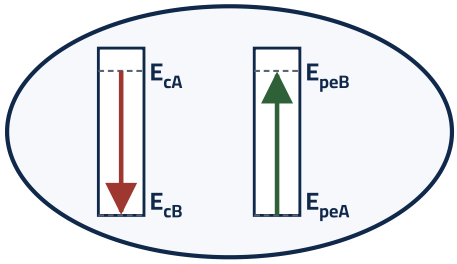
E_p مجموع الطاقات الكامنة المخزّنة في الجملة، وW_{ext} مجموع أعمال القوى الخارجية (موجب إذا كان محرّكا، سالبا إذا كان مقاوما مثل الاحتكاك). نسمّي **الطاقة الميكانيكية** للجملة : $E_m = E_c + E_p$ في غياب الاحتكاك وكلّ تبادل مع الخارج تكون E_m **ثابتة**.

تطبيق 04

نضغط نابضا شاقوليا ($k = 200\ N/m$) بمقدار $x = 10\ cm$ ونضع عليه كرية كتلتها $m = 50\ g$ ثمّ نحرّره. $g = 10\ N/kg$، الاحتكاك مهمل. أوجد الارتفاع الأعظمي H الذي تبلغه الكرية فوق موضعها الابتدائي.

الجملة (كرية + نابض + أرض)، المرجع : الموضع الابتدائي. في البداية $E_c = 0$ و$E_{pp} = 0$ ؛ في أعلى نقطة $E_c = 0$ والنابض بطوله الأصلي $(E_{pe} = 0)$:

$$\tfrac{1}{2} k x^2 = m g H \Rightarrow H = k x^2 / (2 m g) = 200 \times 0{,}01 / (2 \times 0{,}05 \times 10) = 2\ m$$



الجملة (جسم + نابض)

مثال : جسم يضغط نابضا أفقيا حتى يتوقّف — تتحوّل الطاقة الحركية إلى طاقة كامنة مرونية

الجزء الثاني

ملخّص الدرس

كلّ ما يجب حفظه في صفحتين

الطاقة	الجملة	العلاقة	الوحدات والملاحظات
كامنة ثقالية	(جسم + أرض)	$E_{pp} = m\,g\,h$	h عن المستوي المرجعي ؛ نسبية
كامنة مرونية	(جسم + نابض)	$E_{pe} = \frac{1}{2}\,k\,x^2$	k بـ N/m ؛ x بالمتر
كامنة فتلية	(ساق + سلك فتل)	$E_{pt} = \frac{1}{2}\,C\,\theta^2$	C بـ N·m/rad ؛ θ بالراديان
حركية	الجسم	$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$	دوران : $\frac{1}{2}\,J_\Delta\,\omega^2$
ميكانيكية	—	$E_m = E_c + E_p$	ثابتة في غياب الاحتكاك

القوة المرافقة	العلاقة	ملاحظة
توتّر النابض	$T = k\,x$	تعاكس التشوّه، حاملها محور النابض
مزدوجة الفتل	$\mathcal{M} = C\,\theta$	تعيد الساق نحو وضع التوازن
الثقل	$W_{AB}(\vec{P}) = m\,g\,(h_A - h_B)$	$\Delta E_{pp} = -\,W(\vec{P})$

مبدأ انحفاظ الطاقة

$$E_{c1} + E_{p1} + W_{ext} = E_{c2} + E_{p2}$$

في غياب الاحتكاك وكلّ تبادل مع الخارج : $E_{m1} = E_{m2}$. مع الاحتكاك : $E_{m2} - E_{m1} = W(\vec{f}) = -\,f \cdot d$.

طريقة حلّ تمرين في الطاقة

1. **أحدّد الجملة** كما يطلبها السؤال : هل الأرض فيها ؟ هل النابض فيها ؟
2. **أختار المستوي المرجعي** للطاقة الكامنة الثقالية (غالبا أخفض موضع) وأكتبه.

3. **أمثّل الحصيلة الطاقوية** : الخزّانات داخل الجملة، والأعمال الخارجية (الداخلة يسارا، الخارجة يمينا).

4. **أكتب معادلة الانحفاظ** بالرموز، ثمّ أحسب الارتفاعات من الهندسة ($L \sin \alpha$ ، $L(1 - \cos \alpha)$ ، $R(1 - \cos \theta)$ ...).

5. **أعوّض** بوحدات النظام الدولي وأتحقّق من معقولية النتيجة.

الارتفاعات الأكثر استعمالا

الحالة	الارتفاع المقطوع شاقوليا
مستوٍ مائل بزاوية α طوله L	$h = L \cdot \sin \alpha$
مستوٍ مائل «ميله p %»	$\sin \alpha = p / 100$
نواس بسيط طوله ℓ منحرف بزاوية α	$h = \ell (1 - \cos \alpha)$
نابض شاقولي منضغط بـ x	ينزل الجسم أيضا بـ x (لا تنسَ $m g x$)

انتبه : خطأ شائع

- لا نكتب E_{pp} و$\vec{W}(P)$ معا في نفس المعادلة.
- x في $\frac{1}{2} k x^2$ هو تغيّر الطول (بالمتر)، وليس طول النابض.
- θ في $\frac{1}{2} C \theta^2$ بالراديان.
- h ارتفاع **شاقولي** وليس المسافة المقطوعة على المسار.
- عندما ينضغط نابض شاقولي تحت جسم ينزل الجسم أيضا : تتغيّر E_{pp}.

الجزء الثالث

سلسلة التمارين

تسعة عشر تمرينا مرتّبة من الأسهل إلى الأصعب

المستوى 1 **تمارين تطبيقية مباشرة** حساب الطاقات الكامنة، المرجع، الانحفاظ في حالة بسيطة

التمرين 1 : متسلّق بين قمّتين

ترتفع قمّتا جبلَي إيفرست **(Everest)** وأنابورنا **(Annapurna)** على الترتيب بـ **8848 m** و**8091 m** فوق مستوى سطح البحر.

1. أحسب الطاقة الكامنة الثقالية للجملة (متسلّق + أرض) عندما يكون متسلّق كتلته **m = 80 kg** في قمّة أنابورنا، بأخذ المستوي المرجعي : أ) مستوى سطح البحر ؛ ب) قمّة إيفرست.
2. يصعد نفس المتسلّق بعد ذلك إلى قمّة إيفرست.

أ) أحسب تغيّر الطاقة الكامنة الثقالية بين القمّتين في كلّ من المرجعين السابقين.

ب) ماذا تلاحظ ؟ ماذا تستنتج ؟

نعطي : **g = 10 N/kg**

التمرين 2 : معايرة نابض

نعلّق بالطرف الحرّ لنابض مرن، حلقاته غير متلاصقة، أجساما مختلفة الكتلة **m**، ونقيس في كلّ مرّة استطالته **x** عند التوازن :

m (g)	100	200	300	350	400
x (cm)	2	4	6	....	8

1. مثّل القوى المؤثّرة على الجسم المعلّق عند التوازن، واستنتج شدّة توتّر النابض **T** بدلالة **m** و**g**.
2. أكمل الجدول بسطر **T (N)** وارسم البيان **T = f(x)**.
3. استنتج ثابت مرونة النابض **k**، ثمّ أكمل الخانة الفارغة.

4. أحسب الطاقة الكامنة المرونية المخزّنة في النابض عند تعليق الكتلة $m = 350\ g$.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

التمرين 3 : مظلّي قبل فتح المظلّة

يقفز مظلّي كتلته (مع تجهيزه) $m = 80\ kg$ من منطاد ساكن على ارتفاع $1\ km$ من سطح الأرض، ولا يفتح مظلّته إلّا على ارتفاع $700\ m$. نهمل قبل فتح المظلّة كلّ الاحتكاكات ودافعة أرخميدس.

1. أ) حدّد المستوي المرجعي الذي تختاره، ثمّ أحسب الطاقة الكامنة الثقالية للجملة (مظلّي + أرض) لحظة القفز.

ب) أحسب الطاقة الميكانيكية للجملة في هذه اللحظة.

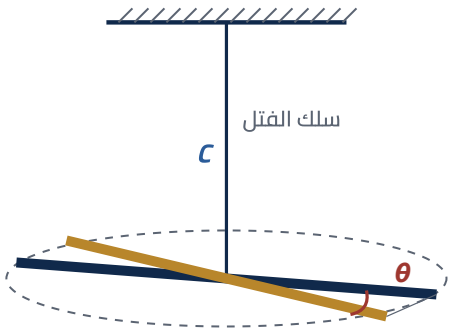
2. أحصِ القوى المؤثّرة على المظلّي قبل فتح المظلّة. ماذا تستنتج بخصوص الطاقة الميكانيكية للجملة (مظلّي + أرض) ؟

3. أحسب سرعة المظلّي لحظة فتح المظلّة.

نعطي : $g = 9{,}8\ N/kg$

التمرين 4 : نواس الفتل

ساق متجانسة معلّقة من مركزها بسلك فتل شاقولي ثابت فتله $C = 2\times10^{-2}\ N{\cdot}m/rad$. عزم عطالة الساق بالنسبة لمحور السلك $J_\Delta = 5\times10^{-4}\ kg{\cdot}m^2$. نُدير الساق في مستوٍ أفقي بزاوية $\theta_m = 90°$ عن وضع توازنها ثمّ نتركها دون سرعة ابتدائية. نهمل كلّ الاحتكاكات.



الساق في وضع التوازن (داكن) وبعد فتلها (ذهبي)

1. أحسب الطاقة الكامنة الفتلية المخزّنة في الجملة (ساق + سلك) لحظة الترك، وعزم مزدوجة الفتل في هذه اللحظة.

2. مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (ساق + سلك) بين لحظة الترك ولحظة مرور الساق بوضع التوازن.

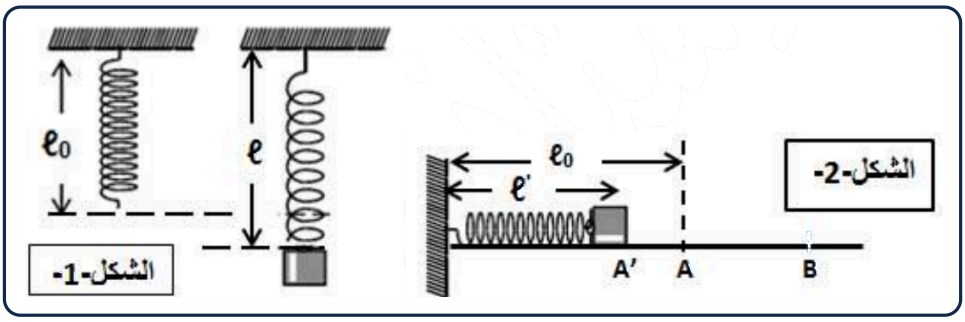
3. أحسب السرعة الزاوية للساق لحظة مرورها بوضع التوازن.

4. عند أيّ زاوية فتل θ تكون الطاقة الحركية للساق مساوية لطاقتها الكامنة الفتلية ؟

التمرين 5 : نابض شاقولي ثمّ أفقي

I- نابض مرن ثابت مرونته $k = 80\ N/m$ وطوله الأصلي $\ell_0 = 20\ cm$. نعلّق به جسما صلبا (S) كتلته $m = 200\ g$ فيصبح طوله ℓ (الشكل 1).

II- نثبّت نفس النابض أفقيا من أحد طرفيه بجدار، ونضغطه بواسطة الجسم **(S)** حتى يصبح طوله $\ell' = 16\ cm$ (الموضع **A'**، الشكل 2)، ثمّ نتركه دون سرعة ابتدائية. يغادر الجسم النابض عند الموضع **A** (النابض بطوله الأصلي). الاحتكاك مهمل بين **A'** و**A**.



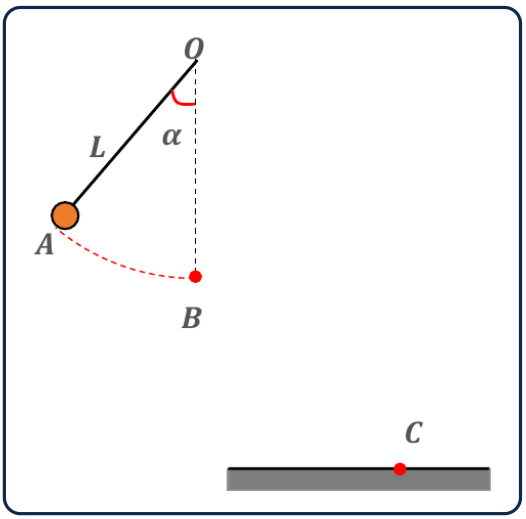
1. (الجزء I) مثّل القوى المؤثّرة على **(S)** واكتب شرط توازنه، ثمّ استنتج شدّة توتّر النابض وطوله ℓ.
2. (الجزء II) أ) أحسب الطاقة الكامنة المرونية المخزّنة في النابض في الموضع **A'**، وشدّة القوة الضاغطة اللازمة لإبقائه فيه.

ب) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (جسم + نابض) بين **A'** و**A** ثمّ أثبت أنّ $v_A = 0,8\ m/s$.

3. يواصل الجسم حركته على الجزء الأفقي **AB** فيتوقّف عند **B** تحت تأثير قوة احتكاك ثابتة شدّتها $f = 0,32\ N$. اكتب معادلة انحفاظ الطاقة للجملة (جسم) بين **A** و**B** ثمّ استنتج الطول **AB**.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

التمرين 6 : نواس ينقطع خيطه



نواس بسيط يتكوّن من كرية نقطية كتلتها $m = 100\ g$ وخيط مهمل الكتلة عديم الامتطاط طوله $L = 1,6\ m$. نقطة التعليق **O** على ارتفاع $H = 2,6\ m$ من سطح الأرض. نزيح الخيط عن الشاقول بزاوية $\alpha = 60°$ (الموضع **A**) ونتركه دون سرعة ابتدائية. نهمل الاحتكاكات ومقاومة الهواء.

1. أ) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (كرية) بين الموضعين **A** و**B** (الشاقول).

ب) أحسب الطاقة الحركية للكرية عند **B**، واستنتج سرعتها.

2. لحظة مرور الكرية بـ **B** ينقطع الخيط فجأة، فتسقط الكرية على الأرض عند **C**.

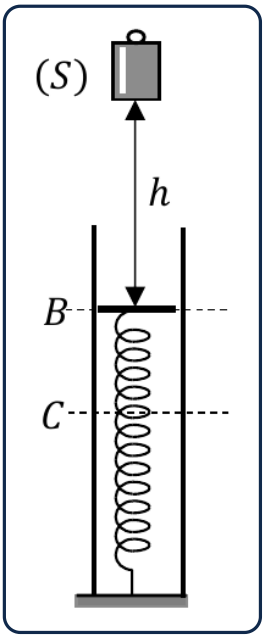
أ) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (كرية + أرض) بين **B** و**C**.

ب) بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة، أحسب الطاقة الحركية للكرية عند **C**، ثمّ سرعتها.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

المستوى 2 **تمارين تثبيت** جمل تضمّ الأرض والنابض، اختيار الجملة والمرجع

التمرين 7 : جسم يسقط على نابض



جسم صلب **(S)** كتلته $m = 200\ g$ موجود في الموضع **A** على ارتفاع $h = 12\ cm$ فوق الطرف الحرّ **B** لنابض شاقولي ثابت مرونته $k = 200\ N/m$. نترك الجسم يسقط دون سرعة ابتدائية فيلتحم بالنابض ويضغطه حتى الموضع **C** حيث تنعدم سرعته. نهمل الاحتكاكات وكتلة الصفيحة. المستوي الأفقي المارّ بـ **B** مرجع للطاقة الكامنة الثقالية.

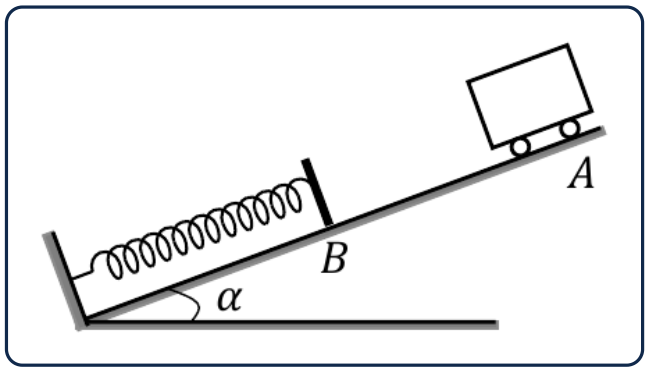
1. مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (جسم + نابض + أرض) بين **A** و**B**، ثمّ اكتب معادلة انحفاظ الطاقة واستنتج سرعة الجسم عند **B**.
2. مثّل الحصيلة الطاقوية لنفس الجملة بين **B** و**C**، ثمّ بيّن أنّ أكبر انضغاط **x** يحقّق المعادلة : $100\ x^2 - 2\ x - 0{,}24 = 0$.
3. أحسب **x**.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

التمرين 8 : عربة ونابض على مستوٍ مائل

عربة كتلتها $m = 2\ kg$ متوقّفة عند النقطة **A** من مستوٍ مائل **ميله** 5 % (أي $\sin \alpha = 0{,}05$). نتركها دون سرعة ابتدائية فتتحرّك على خطّ الميل الأعظم وتصطدم في **B** بصفيحة مهملة الكتلة مثبّتة بالطرف الحرّ لنابض ثابت مرونته

$k = 820\ N/m$، حيث $AB = 4\ m$. نهمل كلّ الاحتكاكات. المستوي الأفقي المارّ بـ **B** مرجع للطاقة الكامنة الثقالية.

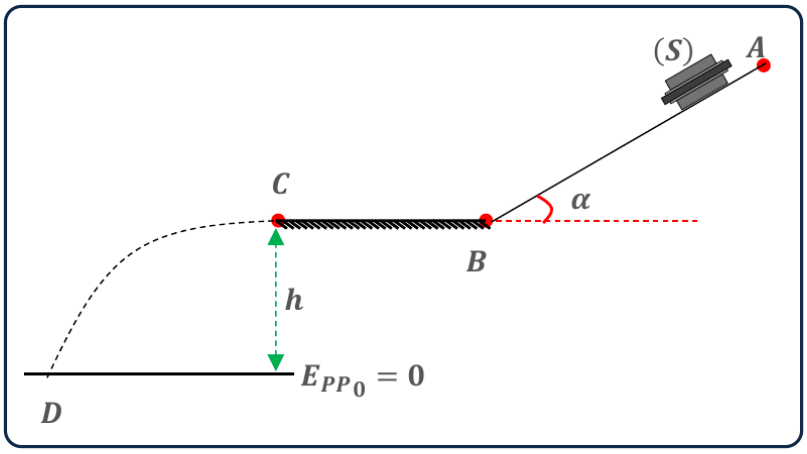


1. بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (عربة + أرض)، أحسب سرعة العربة لحظة اصطدامها بالصفيحة.
2. مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (عربة + نابض + أرض) بين **B** وموضع الانضغاط الأعظمي، ثمّ أحسب أكبر انضغاط **x** للنابض.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

التمرين 9 : مستوٍ خشن ثمّ سقوط

ينزلق جسم صلب **(S)** نعتبره نقطيا، كتلته $m = 100\ g$، على مسار **ABCD** واقع في مستوٍ شاقولي : **AB** مستوٍ مائل خشن يميل عن الأفق بزاوية $\alpha = 30°$، طوله $AB = 60\ cm$ ؛ **BC** مستوٍ أفقي خشن. يتحرّك الجسم من **A** إلى **B** بسرعة ثابتة $v = 6\ m/s$.



1. أ) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (جسم) بين **A** و**B**.

ب) بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة، أوجد شدّة قوة الاحتكاك **f** (نعتبرها ثابتة وموازية للمسار).

2. يواصل الجسم حركته على **BC** تحت تأثير قوة احتكاك لها نفس الشدّة **f**، فيبلغ **C** بسرعة $v_C = 4\ m/s$. أحسب المسافة **BC**.

3. يغادر الجسم المستوي عند **C** ليسقط عند النقطة **D** من سطح الأرض بسرعة $v_D = 7\ m/s$ (مقاومة الهواء مهملة).

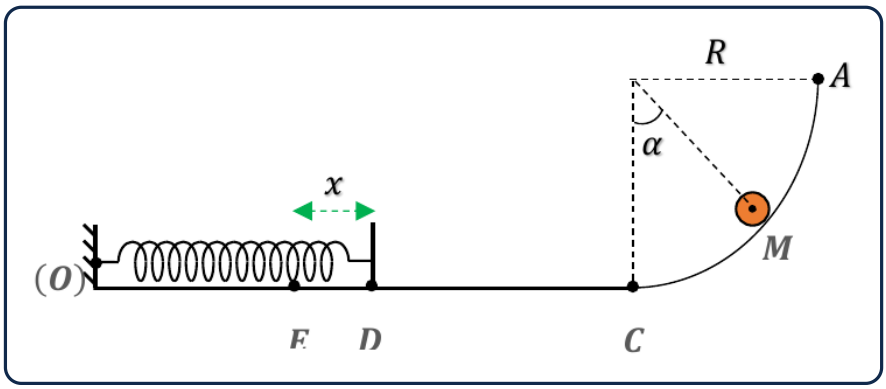
أ) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (جسم + أرض) بين **C** و**D**.

ب) أحسب الارتفاع **h** للنقطة **C** عن سطح الأرض.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

التمرين 10 : مسار دائري ونابض

نحرّر دون سرعة ابتدائية كرية كتلتها $m = 100\ g$ من الموضع **M** لمسار دائري أملس **AC** مركزه **O** ونصف قطره $R = 90\ cm$، حيث $\alpha = 60°$ الزاوية بين **OM** والشاقول **OC**. تواصل الكرية حركتها على المسار الأفقي الأملس **CD**، ثمّ تلتقي في **D** بنابض ثابت مرونته $k = 450\ N/m$ فتضغطه حتى تتوقّف عند **E**.



1. أ) مثّل القوى المؤثّرة على الكرية أثناء الانتقال **MC**.

ب) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (كرية) بين **M** و**C**، ثمّ أحسب سرعتها عند **C**.

2. استنتج سرعة الكرية عند **D**. علّل.

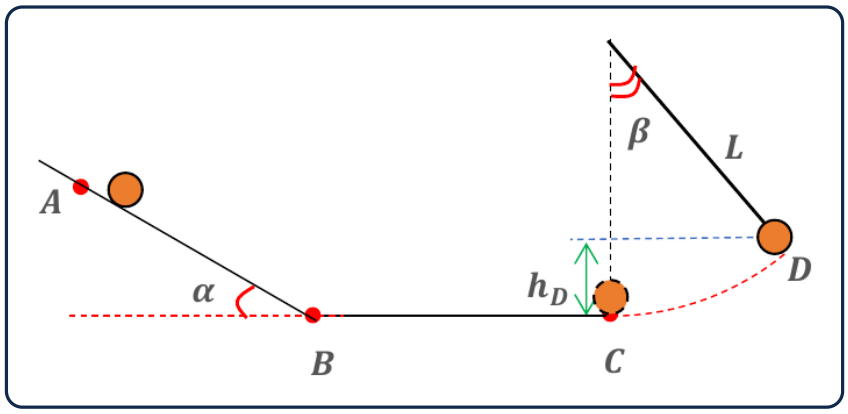
3. أ) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (كرية + نابض) بين **D** و**E**، واكتب معادلة انحفاظ الطاقة.

ب) استنتج المسافة **x** التي ينضغط بها النابض.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

التمرين 11 : كرة تدفع نواسا

تبدأ كرة نقطية كتلتها $m = 100\ g$ حركتها من السكون في القمّة **A** لمستوٍ مائل طوله $AB = 2\ m$ يميل عن الأفق بزاوية $\alpha = 30°$، ثمّ تواصل حركتها على مستوٍ أفقي طوله $BC = 3\ m$ فتصطدم في **C** بكرة نواس بسيط ساكن، كتلتها $m' = 200\ g$ وطول خيطه $\ell = 1\ m$. نهمل الاحتكاكات.



1. أ) أوجد عبارة عمل ثقل الكرة بين **A** و**B** ثمّ أحسب قيمته.

ب) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (كرة) بين **A** و**B**، ثمّ استنتج طاقتها الحركية عند **B** ثمّ عند **C**.

2. نفترض أنّ كرة النواس تكتسب كلّ الطاقة الحركية للكرة أثناء الصدم.

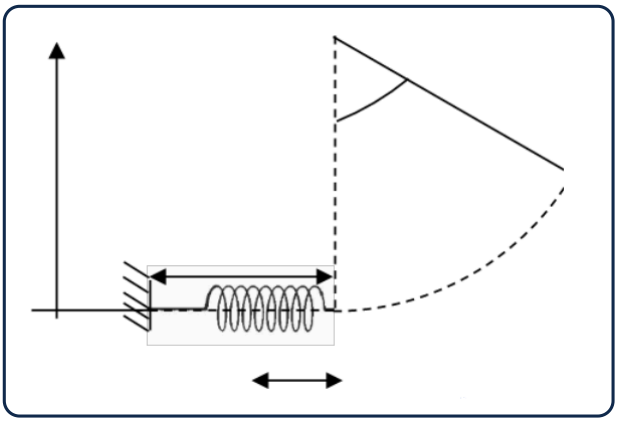
أ) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (كرة النواس + أرض) بين **C** وأعلى موضع **D** تبلغه.

ب) اكتب معادلة انحفاظ الطاقة ثمّ أحسب الارتفاع الأعظمي h_D.

ج) استنتج الزاوية الأعظمية **β** التي ينحرف بها الخيط عن الشاقول.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

التمرين 12 : نواس يضغط نابضا



نواس بسيط يتكوّن من كرية نقطية كتلتها $m = 50\ g$ وخيط طوله $\ell = 0{,}9\ m$. نزيحه عن وضع توازنه الشاقولي بزاوية $\theta = 60°$ ثمّ نتركه دون سرعة ابتدائية من الموضع **A**. لحظة مروره بوضع التوازن **B** يصطدم بالطرف الحرّ لنابض أفقي ثابت مرونته $k = 100\ N/m$، فينضغط النابض بمقدار **x** حتى الموضع **C**. نهمل كلّ أشكال ضياع الطاقة.

1. مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (كرية + نابض + أرض) بين **A** و**B**، ثمّ بين **B** و**C**.

2. أعط عبارة السرعة عند **B** بدلالة **g** و**ℓ** و**θ**، ثمّ أحسبها.

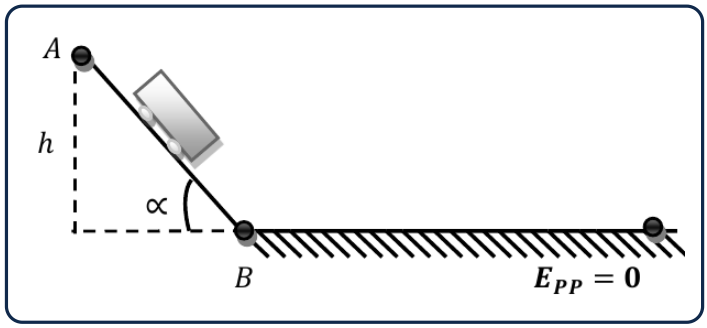
3. أحسب مقدار انضغاط النابض **x**.

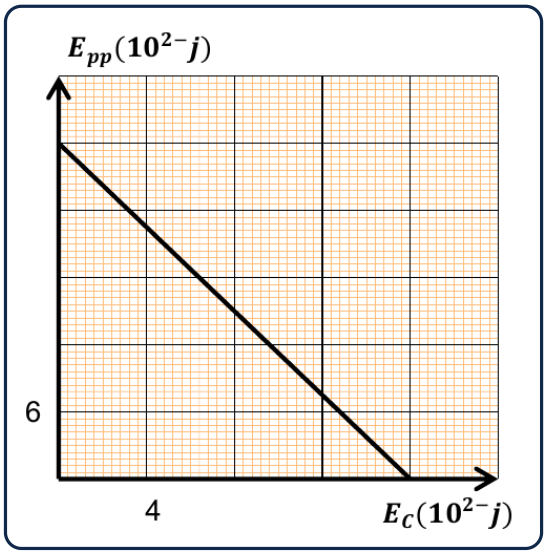
4. استنتج شدّة القوة التي يؤثّر بها النابض على الكرية في الموضع **C**، ومثّلها.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

التمرين 13 : قراءة بيان طاقوي

الجزء الأول : نترك عربة كتلتها **m = 100 g** تنحدر دون سرعة ابتدائية من الموضع **A** لمستوٍ مائل خشن طوله **AB = 50 cm** يميل عن الأفق بزاوية **α**. يمثّل البيان تغيّرات الطاقة الكامنة الثقالية للجملة (عربة + أرض) بدلالة الطاقة الحركية للعربة أثناء الانتقال من **A** إلى **B** (المستوي الأفقي المارّ بـ **B** مرجع).





1. مثّل القوى الخارجية المؤثّرة على العربة بين **A** و**B**.
2. مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (عربة + أرض) بين **A** و**B**، ثمّ اكتب معادلة انحفاظ الطاقة.
3. بالاعتماد على البيان : أ) أحسب الارتفاع **h** واستنتج **sin α** ؛ ب) أحسب سرعة العربة عند **B** ؛ ج) أحسب عمل قوة الاحتكاك بين **A** و**B** ؛ د) استنتج شدّة قوة الاحتكاك **f** (ثابتة).

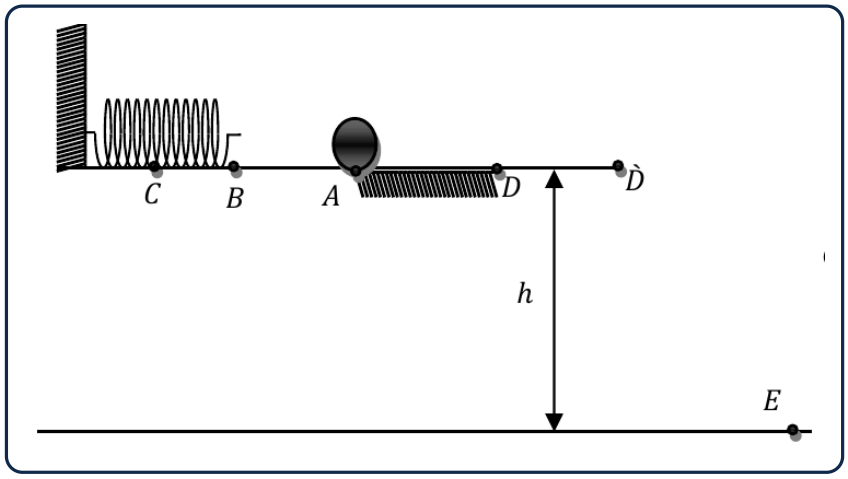
الجزء الثاني : تواصل العربة حركتها على مستوٍ أفقي خشن **BC** تحت تأثير نفس قوة الاحتكاك فتتوقّف عند **C**.

4. مثّل القوى المؤثّرة على العربة بين **B** و**C**، ثمّ اكتب معادلة انحفاظ الطاقة للجملة (عربة).
5. أحسب المسافة **BC**.

نعطي : **g = 10 N/kg**

التمرين 14 : نابض، احتكاك، ثمّ سقوط

يُقذف جسم **(S)** كتلته $m = 500\ g$ من الموضع **A** بسرعة $v_A = 4\ m/s$ على سطح أفقي أملس نحو نابض أفقي ثابت مرونته $k = 250\ N/m$، فيصطدم بطرفه الحرّ في **B** وتنعدم سرعته عند **C**، ثمّ يدفعه النابض في الاتّجاه المعاكس.



1. أ) مثّل القوى المؤثّرة على الجسم بين **A** و**B**، واستنتج طبيعة حركته. علّل.

   ب) استنتج سرعته v_B.

2. أ) مثّل القوى الخارجية المؤثّرة على الجسم في الموضع **C**.

   ب) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (جسم + نابض) بين **B** و**C**، ثمّ أحسب E_{peC}.

   ج) أحسب الانضغاط الأعظمي **x**، واستنتج شدّة القوة التي يؤثّر بها النابض على الجسم في **C**.

3. يعود الجسم فيمرّ بـ **A** بنفس السرعة $4\ m/s$، ثمّ يقطع جزءا خشنا $AD = 37,5\ cm$ تحت تأثير قوة احتكاك ثابتة معيقة شدّتها $f = 1\ N$.

   أ) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (جسم) بين **A** و**D** ثمّ اكتب معادلة انحفاظ الطاقة.

   ب) أوجد السرعة v_D.

4. يقطع الجسم بعد ذلك الجزء الأملس **DD'** ثمّ يغادر الطاولة عند **D'** ليصل إلى سطح الأرض عند **E** بسرعة $v_E = 4,5\ m/s$ (مقاومة الهواء مهملة).

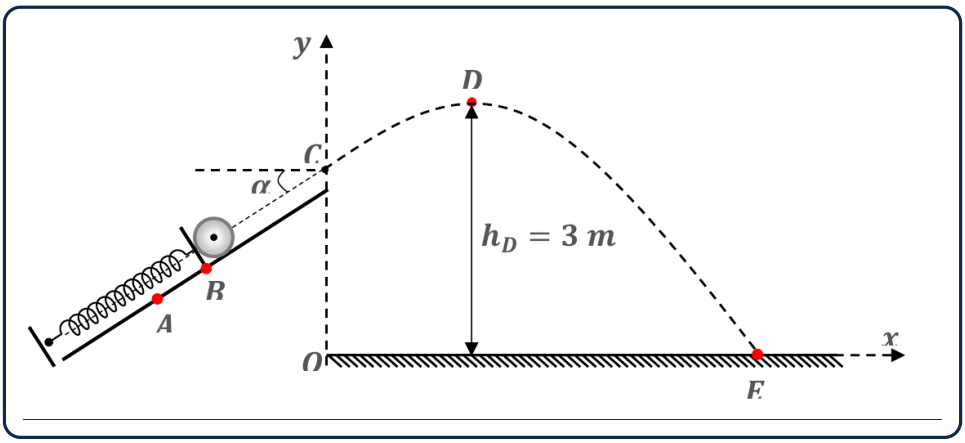
   أ) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (جسم + أرض) بين **D** و**E**، ثمّ اكتب معادلة انحفاظ الطاقة.

   ب) استنتج ارتفاع الطاولة **h**.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

التمرين 15 : نابض في أسفل مستوٍ مائل

نابض ثابت مرونته $k = 67,5\ N/m$، أحد طرفيه مثبّت أسفل مستوٍ مائل أملس يميل عن الأفق بزاوية $\alpha = 30°$، وطرفه الحرّ في الموضع **B**. نضغطه بواسطة جسم **(S)** نقطي كتلته $m = 100\ g$ بمقدار $x_0 = 20\ cm$ على خطّ الميل الأعظم (الموضع **A**) ثمّ نتركه دون سرعة ابتدائية، فينطلق الجسم من **A** مارّا بـ **B** إلى **C** أعلى المستوي. المستوي الأفقي المارّ بـ **A** مرجع للطاقة الكامنة الثقالية.



1. أ) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (جسم + نابض + أرض) بين **A** و**B**، ثمّ اكتب معادلة انحفاظ الطاقة.

   ب) أحسب السرعة عند **B**.

2. يبلغ الجسم **C** بالسرعة $v_C = 3\ m/s$. مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (جسم) بين **B** و**C**، ثمّ أحسب المسافة **BC**.

3. يغادر الجسم المستوي في **C** ويواصل حركته في الهواء مارّا بالذروة **D** ليصطدم بالأرض في **E**. ارتفاع الذروة عن الأرض $h_D = 3\ m$، ومقاومة الهواء مهملة.

   أ) مثّل كيفيا شعاعي السرعة في **C** و**D**.

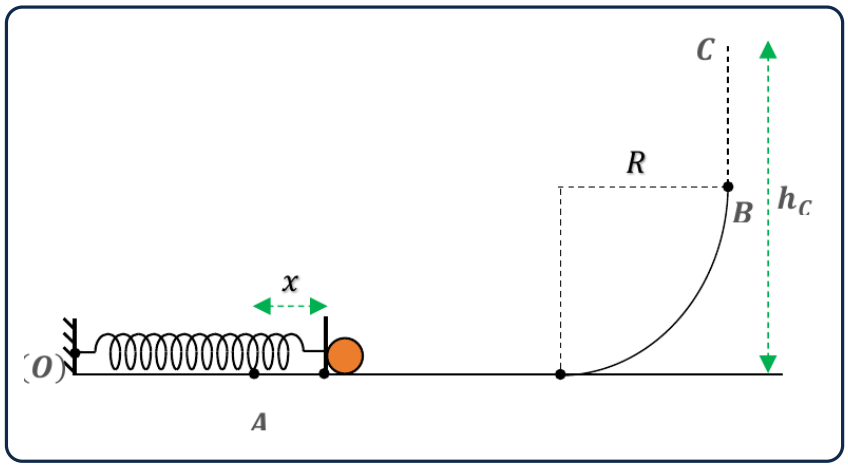
   ب) نقبل أنّ المركّبة الأفقية لشعاع السرعة تبقى ثابتة أثناء الحركة في الهواء. أحسب v_D، ثمّ v_E.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

التمرين 16 : قاذف بنابض

نابض أفقي ثابت مرونته $k = 240\ N/m$، أحد طرفيه مثبّت. نضغطه بواسطة جسم **(S)** نقطي كتلته $m = 500\ g$ بمقدار x_0 ثمّ نتركه دون سرعة ابتدائية، فينطلق الجسم من **A** على مسار أفقي ثمّ على ربع دائرة شاقولي مركزه **O** ونصف قطره

$r = 1\ m$. عند B، أعلى ربع الدائرة (على الارتفاع r من المسار الأفقي)، يكون شعاع سرعته شاقوليا، فيواصل حركته في الهواء نحو الأعلى حتى الموضع C. نهمل كلّ الاحتكاكات، والمسار الأفقي مرجع للطاقة الكامنة الثقالية.



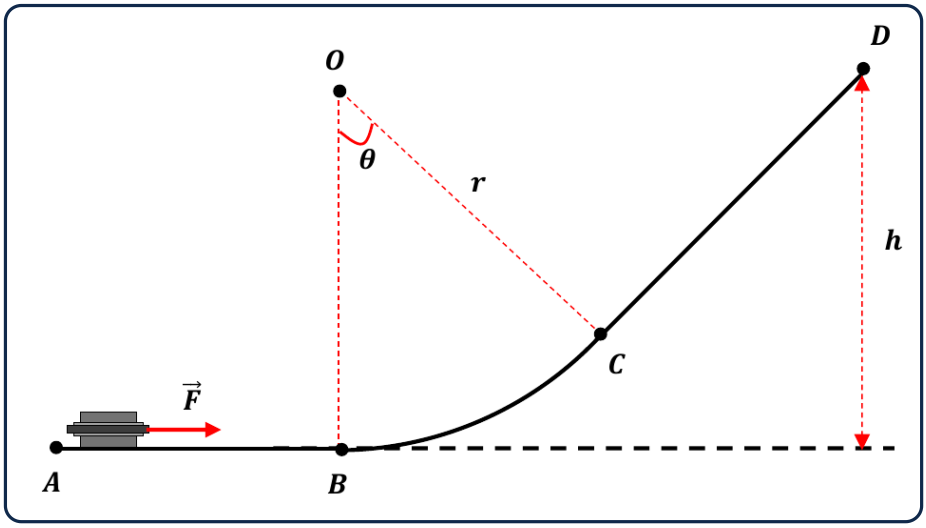
1. بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الجملة (جسم + نابض + أرض) بين A وB، أوجد الانضغاط x_0 اللازم ليبلغ الجسم B بسرعة $v_B = 10\ m/s$.

2. بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على نفس الجملة بين A وC، أوجد أقصى ارتفاع h_C يبلغه الجسم بالنسبة للمسار الأفقي.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

التمرين 17 : دفع ثمّ صعود

نطبّق على جسم (S) ساكن كتلته $m = 5\ kg$ قوة ثابتة أفقية $\vec{F}$ على طول المسار AB فقط، فيواصل حركته على المسار BCD : AB مستقيم أفقي طوله d ؛ BC قوس من دائرة نصف قطرها $r = 2\ m$ يحصر الزاوية $\theta = 30°$ ؛ CD مستقيم مائل. الاحتكاكات مهملة على طول المسار، وD على الارتفاع h من AB.



1. مثّل القوى المؤثّرة على الجسم خلال المسار AB.

2. أ) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (جسم) بين **A** و**B**.

ب) بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة، أثبت أنّ : $v_B = \sqrt{(2\ F\ d\ /\ m)}$.

3. يصل الجسم إلى **D** بسرعة منعدمة.

أ) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (جسم + أرض) بين **B** و**D**.

ب) أوجد عبارة v_B بدلالة **h** و**g**.

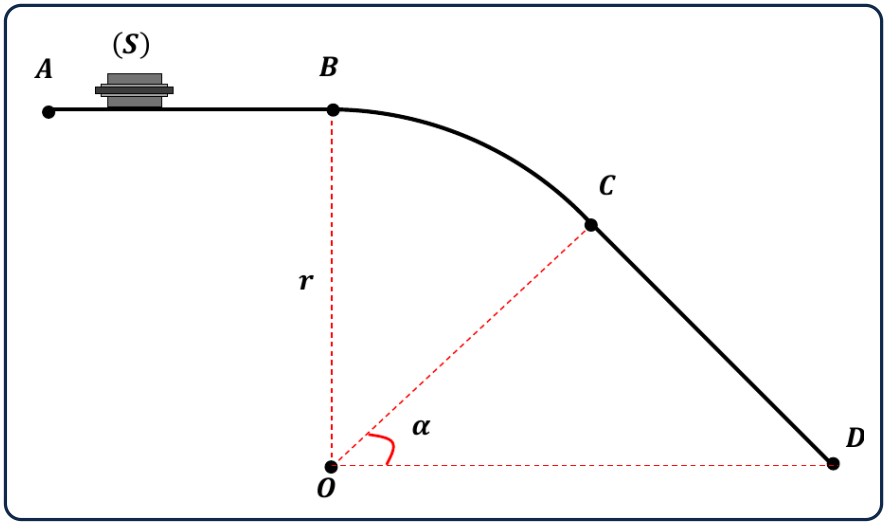
ج) استنتج عبارة **F** بدلالة **m** و**g** و**h** و**d**، ثمّ أحسبها من أجل $d = 0{,}1\ m$ و$h = 2{,}8\ m$.

4. أحسب السرعة v_C عند **C**.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

التمرين 18 : مسار مركّب

جسم صلب **(S)** كتلته $m = 200\ g$ ينزلق على المسار **ABCD** : **AB** مستقيم أفقي طوله $d = 2\ m$ ؛ **BC** جزء دائري مركزه **O** ونصف قطره $r = 3\ m$، النقطة **B** أعلاه (**OB** شاقولي) و$\alpha = 60°$ الزاوية بين **OC** والأفق ؛ **CD** مستقيم مائل طوله $CD = 2\ m$ يميل عن الأفق بـ $30°$. نرسل الجسم من **A** بسرعة $v_A = 3\ m/s$ فيصل إلى **B** بسرعة $v_B = 2\ m/s$.



1. فسّر تناقص سرعة الجسم، ثمّ مثّل القوى المؤثّرة عليه خلال **AB**.

2. مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (جسم) بين **A** و**B**، ثمّ أحسب مجموع أعمال القوى المؤثّرة عليه.

3. قوى الاحتكاك تكافئ قوة $\vec{f}$ ثابتة موازية لـ **AB**. أوجد شدّتها.

4. نهمل الاحتكاكات على **BC** و**CD**.

أ) مثّل الحصيلة الطاقوية للجملة (جسم + أرض) بين **B** و**C**.

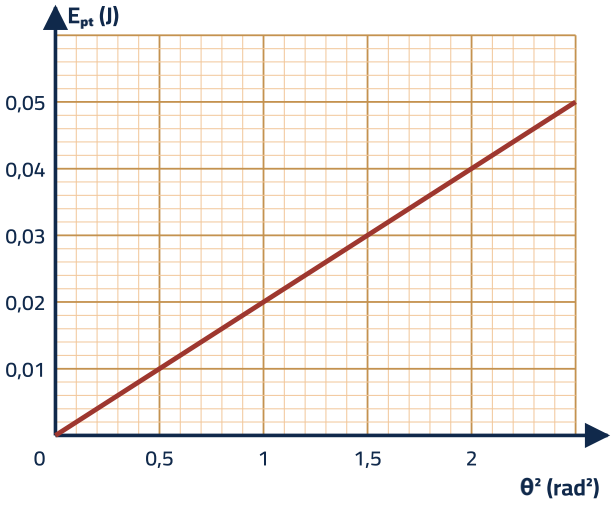
ب) أثبت أنّ : $v_C = \sqrt{(2\,g\,r\,(1 - \sin\alpha) + v_B^2)}$، ثمّ أحسبها.

ج) أحسب سرعة الجسم v_D عند **D**.

نعطي : $g = 10\ N/kg$

التمرين 19 : تعيين ثابت فتل سلك

لتعيين ثابت فتل سلك، نفتل ساقا معلّقة به بزوايا مختلفة θ ونحسب في كلّ مرّة الطاقة الكامنة الفتلية E_{pt} المخزّنة، فنحصل على البيان $E_{pt} = f(\theta^2)$.



1. اكتب المعادلة الرياضية للبيان، وقارنها بعبارة الطاقة الكامنة الفتلية. استنتج ثابت الفتل **C**.

2. نفتل الساق بزاوية $\theta_m = 1\ rad$ ثمّ نتركها دون سرعة ابتدائية. عزم عطالة الساق $J_\Delta = 2\times10^{-3}\ kg\cdot m^2$، والاحتكاك مهمل.

أ) ما الطاقة الميكانيكية للجملة (ساق + سلك) ؟

ب) أحسب السرعة الزاوية العظمى للساق. في أيّ موضع تبلغها ؟

3. أحسب عزم مزدوجة الفتل عندما $\theta = 0{,}5\ rad$، والسرعة الزاوية للساق في هذا الموضع.

الجزء الرابع

الحلول المفصّلة

كلّ حلّ مسبوق بتوجيه منهجي، مع التنبيه إلى الأخطاء الشائعة

المستوى 1 تمارين تطبيقية مباشرة

حلّ التمرين 1

توجيه منهجي

في $E_{pp} = mgh$ هو الارتفاع **عن المستوي المرجعي** : يكون سالبا إذا كان الجسم تحت هذا المستوي. أمّا التغيّر ΔE_{pp} فيُحسب كفرق بين حالتين، فلا يتعلّق بالمرجع.

1. أ)

$$E_{pp} = m\,g\,h = 80 \times 10 \times 8091 \approx 6{,}47\times10^{6}\ \text{J}$$

ب) المتسلّق تحت قمّة إيفرست بـ $8848 - 8091 = 757\ \text{m}$:

$$E_{pp} = 80 \times 10 \times (-757) \approx -6{,}06\times10^{5}\ \text{J}$$

2. أ) مرجع سطح البحر :

$$\Delta E_{pp} = 80 \times 10 \times 8848 - 80 \times 10 \times 8091 = 6{,}06\times10^{5}\ \text{J}$$

مرجع قمّة إيفرست :

$$\Delta E_{pp} = 0 - (-6{,}06\times10^{5}) = 6{,}06\times10^{5}\ \text{J}$$

ب) قيمة E_{pp} تتغيّر بتغيّر المرجع (مقدار نسبي)، أمّا تغيّرها بين موضعين فلا يتعلّق بالمرجع. وهي موجبة لأنّ المتسلّق صعد.

انتبه : خطأ شائع

طاقة كامنة ثقالية سالبة ليست خطأ : معناها أنّ الجسم تحت المستوي المرجعي.

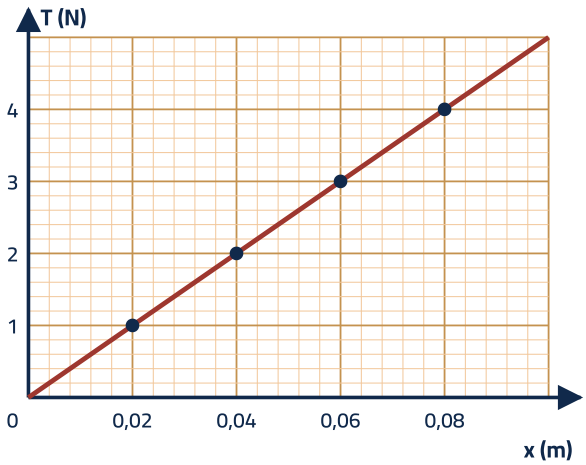
حلّ التمرين 2

توجيه منهجي

عند التوازن $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$، ومنه $T = m\,g$. البيان $T = f(x)$ مستقيم يمرّ بالمبدأ : ميله هو k. ثمّ $E_{pe} = \frac{1}{2}\,k\,x^2$ مع x بالمتر.

1. الجسم خاضع لثقله $\vec{P}$ (نحو الأسفل) وتوتّر النابض $\vec{T}$ (نحو الأعلى) : $T = P = m\,g$.

2. $T\,(N)$: $1\,;\,2\,;\,3\,;\,3{,}5\,;\,4$.



البيان $T = f(x)$

3. $k = \Delta T / \Delta x = 4 / 0{,}08 = 50\ N/m$

الخانة الفارغة : $x = T / k = 3{,}5 / 50 = 0{,}07\ m = 7\ cm$.

4. $E_{pe} = \frac{1}{2} \times 50 \times 0{,}07^2 \approx 0{,}12\ J$

حلّ التمرين 3

توجيه منهجي

اختر المرجع (سطح الأرض) واكتبه صراحة. في غياب الاحتكاك تكون الجملة (مظلّي + أرض) معزولة طاقويا : E_m ثابتة، وما تفقده من E_{pp} يتحوّل إلى E_c.

1. أ) المرجع : سطح الأرض.

$$E_{pp0} = m\,g\,h_0 = 80 \times 9{,}8 \times 1000 = 7{,}84\times10^{5}\ \text{J}$$

ب) المنطاد ساكن، إذن $E_{c0} = 0$:

$$E_{m0} = E_{c0} + E_{pp0} = 7{,}84\times10^{5}\ \text{J}$$

2. القوة الوحيدة هي **الثقل** $\vec{P}$، وهي قوة داخلية للجملة (مظلّي + أرض) : الجملة لا تتبادل طاقة مع الخارج، فـE_m **تحفظ**.

3. $$E_{m1} = E_{m0} \Rightarrow \tfrac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,g\,h_1 = m\,g\,h_0$$

$$v = \sqrt{2\,g\,(h_0 - h_1)} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 300} \approx 76{,}7\ \text{m/s}$$

أي حوالي **276 km/h**.

حلّ التمرين 4

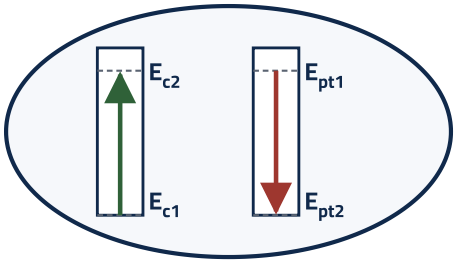
توجيه منهجي

نواس الفتل هو «النابض الدوراني» : $E_{pt} = \tfrac{1}{2}\,C\,\theta^2$ مقابل $\tfrac{1}{2}\,k\,x^2$، و$E_c = \tfrac{1}{2}\,J_\Delta\,\omega^2$ مقابل $\tfrac{1}{2}\,m\,v^2$. الزاوية بالراديان دائما.

1. $$\theta_m = \pi/2 \approx 1{,}57\ \text{rad}$$

$$E_{pt} = \tfrac{1}{2}\,C\,\theta_m^{\,2} = \tfrac{1}{2} \times 2\times10^{-2} \times 1{,}57^2 \approx 2{,}47\times10^{-2}\ \text{J}$$

$$\mathcal{M} = C\,\theta_m = 2\times10^{-2} \times 1{,}57 \approx 3{,}14\times10^{-2}\ \text{N·m}$$



الجملة (ساق + سلك فتل)

2.

3. $\frac{1}{2} C \theta_m^2 = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \Rightarrow \omega = \theta_m \sqrt{(C / J_\Delta)} = 1{,}57 \times \sqrt{40} \approx 9{,}93 \text{ rad/s}$

4. الطاقة الميكانيكية ثابتة : $E_c + E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta_m^2$. وعندما تتساوى الطاقتان :

$$2 \times \frac{1}{2} C \theta^2 = \frac{1}{2} C \theta_m^2$$

$$\theta = \theta_m / \sqrt{2} \approx 1{,}11 \text{ rad} \approx 63{,}6°$$

حلّ التمرين 5

توجيه منهجي

في الجزء I : شرط التوازن $T = P$ ثمّ $x = T/k$. في الجزء II : الجملة (جسم + نابض) دون احتكاك، فـE_{pe} تتحوّل كلّها إلى E_c. ومع الاحتكاك نختار الجملة (جسم) : الاحتكاك عمل مقاوم يخرج من الجملة.

1. **(S)** خاضع لـ $\vec{P}$ و$\vec{T}$: $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$، ومنه :

$$T = m\,g = 0{,}2 \times 10 = 2 \text{ N}$$

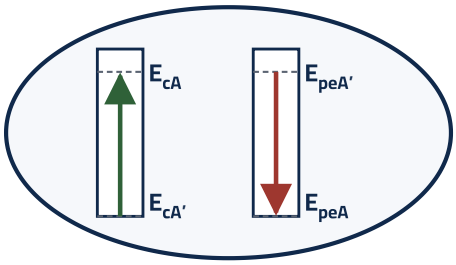
$$x = T / k = 2 / 80 = 0{,}025 \text{ m} \Rightarrow \ell = \ell_0 + x = 22{,}5 \text{ cm}$$

2. أ) الانضغاط : $x' = \ell_0 - \ell' = 4\ cm = 0{,}04\ m$

$$E_{pe} = \tfrac{1}{2} \times 80 \times 0{,}04^2 = 6{,}4\times10^{-2}\ J$$

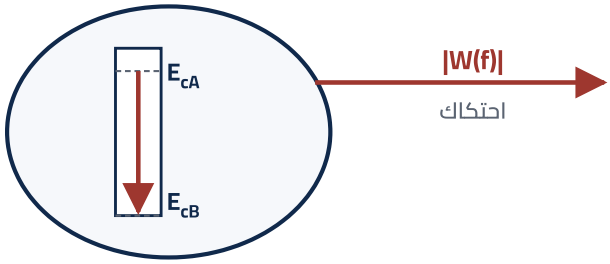
$$F = k\,x' = 80 \times 0{,}04 = 3{,}2\ N$$

ب)



الجملة (جسم + نابض)

$$E_{peA'} = E_{cA} \Rightarrow v_A = \sqrt{(k\,x'^2 / m)} = \sqrt{(0{,}064 \times 2 / 0{,}2)} = 0{,}8\ m/s$$



الجملة (جسم)

3.

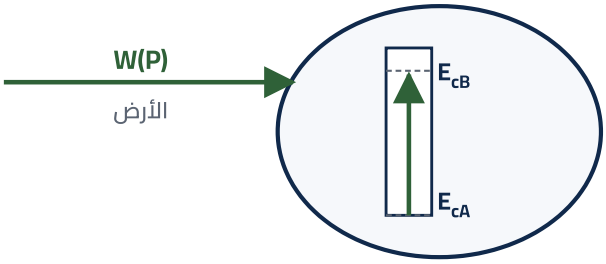
$$E_{cA} - f \cdot AB = 0 \Rightarrow AB = E_{cA} / f = 0{,}064 / 0{,}32 = 0{,}2\ m$$

حلّ التمرين 6

توجيه منهجي

للجملة (كرية) نكتب $E_{cA} + W_{AB}(\vec{P}) = E_{cB}$ (عمل توتّر الخيط معدوم لأنّه عمودي على السرعة). ارتفاع النزول في النواس : $h = L\,(1 - \cos\alpha)$.

1. أ)



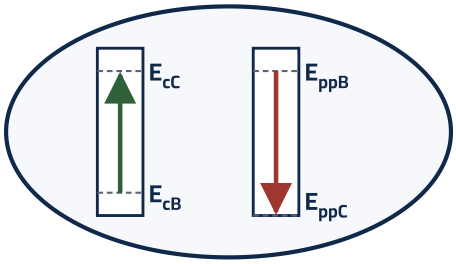
الجملة (كرية)

ب)

$$E_{cB} = m\,g\,L\,(1 - \cos\alpha) = 0{,}1 \times 10 \times 1{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}8\ J$$

$$v_B = \sqrt{(2\,E_{cB} / m)} = \sqrt{16} = 4\ m/s$$

2. أ)



الجملة (كرية + أرض)

ب) المرجع سطح الأرض، وB على الارتفاع $H - L = 1\ m$:

$$E_{cC} = E_{cB} + m\,g\,(H - L) = 0{,}8 + 0{,}1 \times 10 \times 1 = 1{,}8\ J$$

$$v_C = \sqrt{(2 \times 1{,}8 / 0{,}1)} = 6\ m/s$$

انتبه : خطأ شائع

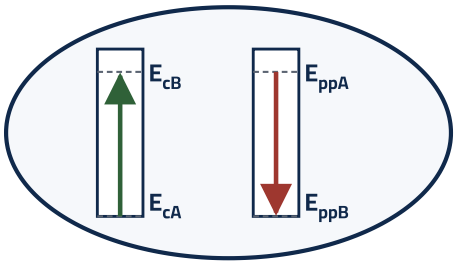
بعد انقطاع الخيط لا تنزل الكرية شاقوليا من B، لكنّ ذلك لا يهمّ : الطاقة تتعلّق بفرق الارتفاع فقط، وليس بشكل المسار.

حلّ التمرين 7

توجيه منهجي

بين B وC يتغيّر خزّانان معا : ينضغط النابض (E_{pe} ↑) وينزل الجسم تحت المرجع (E_{pp} ↓). لا تنسَ الحدّ m g x.

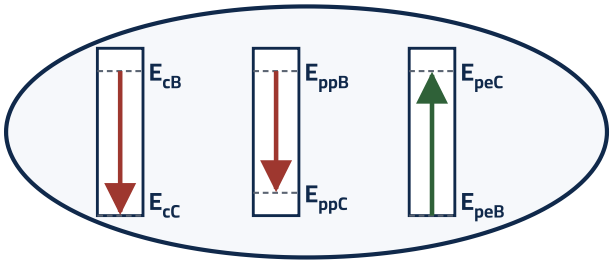
1.



الجملة (جسم + نابض + أرض)

$$m\,g\,h = \tfrac{1}{2}\,m\,v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{(2\,g\,h)} = \sqrt{(2 \times 10 \times 0{,}12)} \approx 1{,}55\ m/s$$

2.



الجملة (جسم + نابض + أرض)

$$E_{cB} + 0 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}\,k\,x^2 - m\,g\,x$$

مع $E_{cB} = m\,g\,h = 0{,}24\ J$:

$$100\,x^2 - 2\,x - 0{,}24 = 0$$

3. $\Delta = 4 + 96 = 100 \Rightarrow x = (2 + 10) / 200 = 0{,}06\ m = 6\ cm$

(الحلّ السالب مرفوض).

انتبه : خطأ شائع

في الحصيلة الأولى الطاقة الكامنة الثقالية في B معدومة (المرجع)، وفي الثانية تصبح سالبة في C : $E_{ppC} = -\,m\,g\,x$.

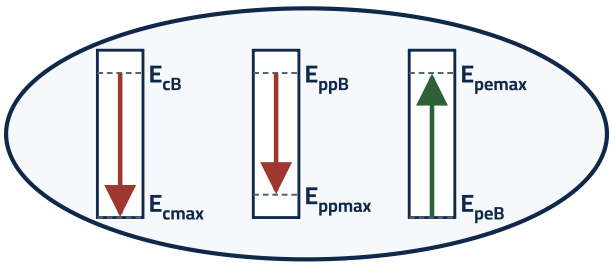
حلّ التمرين 8

توجيه منهجي

ميل 5 % يعني $\sin\alpha = 0{,}05$. أثناء الانضغاط تواصل العربة النزول على المستوي : تتحوّل E_c وE_{pp} معا إلى E_{pe}.

1. $m\,g \cdot AB \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\,m\,v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{(2 \times 10 \times 4 \times 0{,}05)} = 2\ m/s$

2.



الجملة (عربة + نابض + أرض)

$\frac{1}{2}\,m\,v_B^2 = \frac{1}{2}\,k\,x^2 - m\,g\,x\sin\alpha \Rightarrow 410\,x^2 - x - 4 = 0$

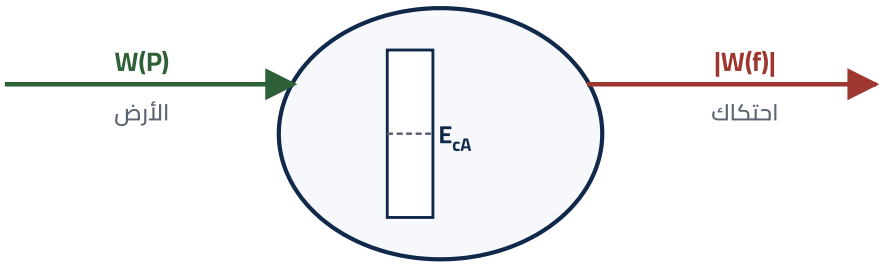
$x = (1 + \sqrt{6561}) / 820 = (1 + 81) / 820 = 0{,}1\ m$

حلّ التمرين 9

توجيه منهجي

«سرعة ثابتة» تعني $\Delta E_c = 0$: الطاقة التي يقدّمها الثقل يستهلكها الاحتكاك كلّها. على المستوي الأفقي عمل الثقل معدوم. في السقوط نختار الجملة (جسم + أرض) دون احتكاك.

1. أ)



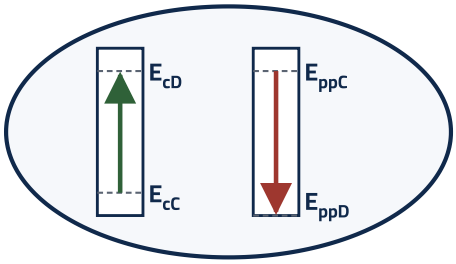
الجملة (جسم)

ب)

$$0 = m\,g \cdot AB \cdot \sin\alpha - f \cdot AB \Rightarrow f = m\,g\sin\alpha = 0{,}1 \times 10 \times 0{,}5 = 0{,}5\ N$$

2. $$\tfrac{1}{2}\,m\,v_C^2 = \tfrac{1}{2}\,m\,v_B^2 - f \cdot BC \Rightarrow BC = m\,(v_B^2 - v_C^2) / (2\,f) = 0{,}1 \times 20 / 1 = 2\ m$$

3. أ)



الجملة (جسم + أرض)

ب)

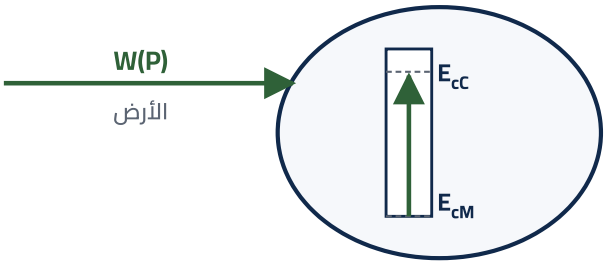
$$\tfrac{1}{2}\,m\,v_C^2 + m\,g\,h = \tfrac{1}{2}\,m\,v_D^2 \Rightarrow h = (v_D^2 - v_C^2) / 2g = (49 - 16) / 20 = 1{,}65\ m$$

حلّ التمرين 10

توجيه منهجي

المسار أملس : رد فعل المسار عمودي على السرعة فعمله معدوم. الارتفاع المقطوع على قوس : $R\,(1 - \cos\alpha)$ حيث α مقيسة من الشاقول.

1. أ) الكرية خاضعة لثقلها $\vec{P}$ ولردّ فعل المسار $\vec{R}$ العمودي عليه (نحو المركز O). ب)

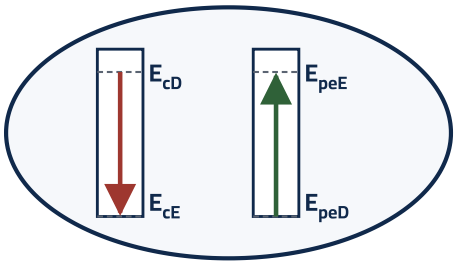


الجملة (كرية)

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_C^2 = m\, g\, R\,(1 - \cos\alpha) \Rightarrow v_C = \sqrt{(2 \times 10 \times 0{,}9 \times 0{,}5)} = 3\ m/s$$

2. على CD الأفقي الأملس، الثقل ورد الفعل عموديان على الانتقال : $\Sigma W = 0$، إذن $v_D = v_C = 3\ m/s$.

3. أ)



الجملة (كرية + نابض)

$$\tfrac{1}{2}\, m\, v_D^2 = \tfrac{1}{2}\, k\, x^2$$

ب)

$$x = v_D \sqrt{(m / k)} = 3 \times \sqrt{(0{,}1 / 450)} \approx 4{,}5 \times 10^{-2}\ m$$

حلّ التمرين 11

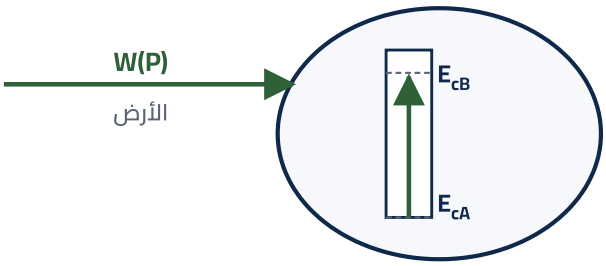
توجيه منهجي

عمل الثقل لا يتعلّق بالمسار : $W_{AB}(\vec{P}) = m\, g \cdot AB \cdot \sin\alpha$. في النواس : $h_D = \ell\,(1 - \cos\beta)$، ومنه $\cos\beta = 1 - h_D / \ell$.

1. أ)

$$W_{AB}(\vec{P}) = m\,g \cdot AB \cdot \sin\alpha = 0{,}1 \times 10 \times 2 \times 0{,}5 = 1\ J$$

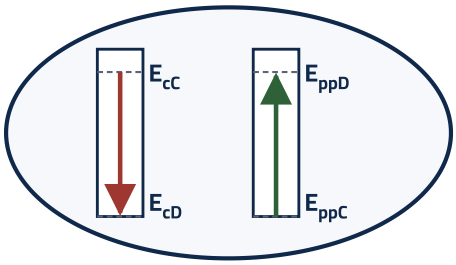
ب)



الجملة (كرة)

$E_{cB} = W_{AB}(\vec{P}) = 1\ J$ ؛ وعلى BC الأفقي الأملس $\Sigma W = 0$، ومنه $E_{cC} = 1\ J$.

2. أ)



الجملة (كرة النواس + أرض)

ب)

$$E_{cC} = m'\,g\,h_D \Rightarrow h_D = 1 / (0{,}2 \times 10) = 0{,}5\ m$$

ج)

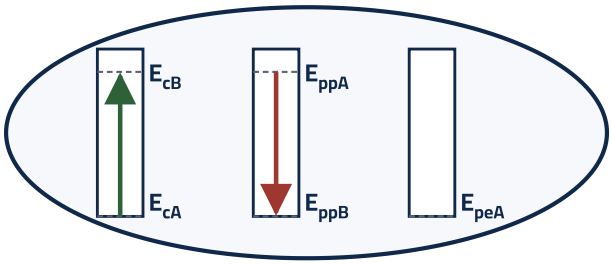
$$\cos\beta = 1 - 0{,}5 / 1 = 0{,}5 \Rightarrow \beta = 60°$$

حلّ التمرين 12

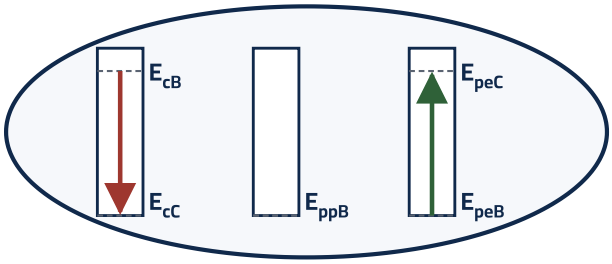
توجيه منهجي

مرحلتان : النواس (E_{pp} تحوّل إلى E_c)، ثمّ النابض (E_c تحوّل إلى E_{pe}). وفي **C** يكون النابض منضغطا فيؤثّر بقوة نحو خارجه.

1.



A → B



B → C

2. $$v_B = \sqrt{(2\, g\, \ell\, (1 - \cos\theta))} = \sqrt{(2 \times 10 \times 0{,}9 \times 0{,}5)} = 3 \text{ m/s}$$

3. $$E_{cB} = \tfrac{1}{2} \times 0{,}05 \times 3^2 = 0{,}225 \text{ J} = \tfrac{1}{2} k x^2 \Rightarrow x = \sqrt{(0{,}45 / 100)} \approx 6{,}7 \times 10^{-2} \text{ m}$$

4. $$T = k x = 100 \times 0{,}067 \approx 6{,}7 \text{ N}$$

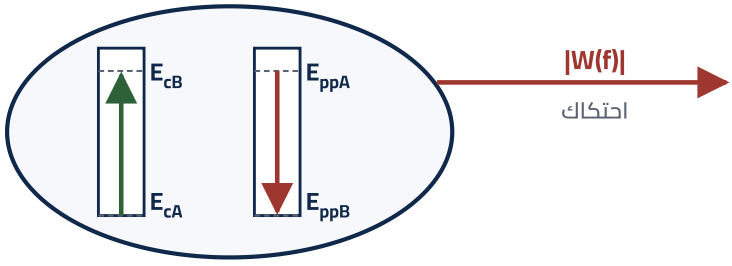
أفقية، جهتها نحو خارج النابض (معاكسة لانضغاطه).

حلّ التمرين 13

توجيه منهجي

على البيان : E_{pp} عند $E_c = 0$ هي E_{ppA}، وE_c عند $E_{pp} = 0$ هي E_{cB}. الفرق بين ما فقدته الجملة من E_{pp} وما اكتسبته من E_c هو ما ضيّعه الاحتكاك.

1. الثقل $\vec{P}$، ورد فعل المستوي $\vec{R}$ المائل عن الناظم (المستوي خشن) نحو الخلف.



الجملة (عربة + أرض)

2.

$$E_{ppA} + 0 - f \cdot AB = E_{cB} + 0$$

3. أ)

$$E_{ppA} = 6\times10^{-2}\ J \Rightarrow h = E_{ppA} / (m\ g) = 0{,}06 / 1 = 6\ cm$$

ب) $\sin\alpha = h / AB = 0{,}12$ ؛ $(\alpha \approx 6{,}9°)$.

$$E_{cB} = 4\times10^{-2}\ J \Rightarrow v_B = \sqrt{(2 \times 0{,}04 / 0{,}1)} \approx 0{,}89\ m/s$$

ج)

$$W(f) = E_{cB} - E_{ppA} = 0{,}04 - 0{,}06 = -\ 2\times10^{-2}\ J$$

د)

$$f = |W(f)| / AB = 0{,}02 / 0{,}5 = 4\times10^{-2}\ N$$

4. الثقل $\vec{P}$ ورد الفعل $\vec{R}$ (له مركّبة $\vec{f}$ معاكسة للحركة). $E_{cB} - f \cdot BC = 0$.

5. $BC = E_{cB} / f = 0{,}04 / 0{,}04 = 1\ m$

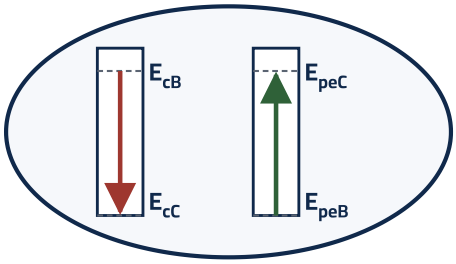
حلّ التمرين 14

توجيه منهجي

سطح أملس، إذن $\Sigma W = 0$ والحركة مستقيمة منتظمة. ثمّ في كلّ مرحلة : أحدّد الجملة، الخزّانات، والأعمال الخارجية. الاحتكاك يُكتب عملا $-f \cdot d$ للجملة (جسم).

1. أ) $\vec{P}$ و$\vec{R}$ متعاكستان ومتساويتان في الشدّة : $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$، فالحركة **مستقيمة منتظمة** (مبدأ العطالة). ب) $v_B = v_A = 4\ m/s$.

2. أ) الثقل $\vec{P}$، رد الفعل $\vec{R}$، وقوة النابض $\vec{T}$ نحو خارج النابض (عكس الانضغاط). ب)



الجملة (جسم + نابض)

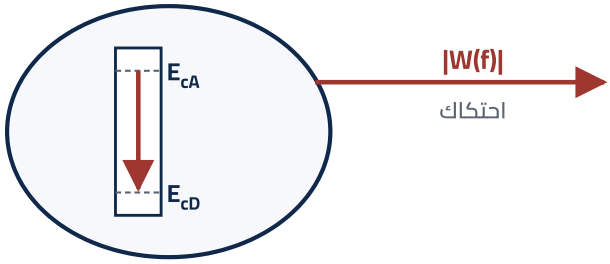
$E_{peC} = E_{cB} = ½ \times 0{,}5 \times 4^2 = 4\ J$

ج)

$x = \sqrt{(2\ E_{peC} / k)} = \sqrt{(8 / 250)} \approx 0{,}179\ m$

$T = k\ x = 250 \times 0{,}179 \approx 44{,}7\ N$

3. أ)



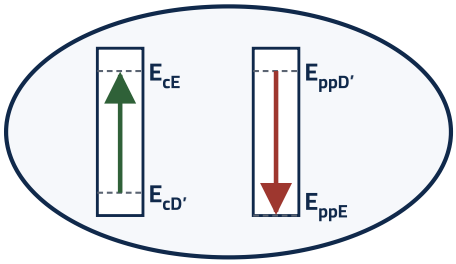
الجملة (جسم)

$$E_{cA} - f \cdot AD = E_{cD}$$

ب)

$$E_{cD} = 4 - 1 \times 0{,}375 = 3{,}625\ J \Rightarrow v_D = \sqrt{(2 \times 3{,}625 / 0{,}5)} \approx 3{,}81\ m/s$$

4. أ)



الجملة (جسم + أرض)

على DD' الأملس تبقى $E_{cD'} = E_{cD}$:

$$E_{cD'} + m\,g\,h = E_{cE}$$

ب)

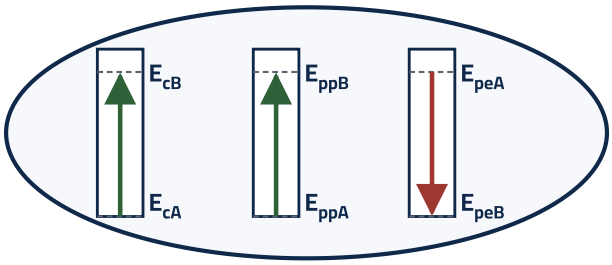
$$h = (v_E^2 - v_D^2) / 2g = (20{,}25 - 14{,}5) / 20 \approx 0{,}29\ m$$

حلّ التمرين 15

توجيه منهجي

المرجع هو الأفقي المارّ بـ A : في B يكون الجسم قد صعد $x_0 \sin \alpha$. في الهواء : المركّبة الأفقية للسرعة ثابتة، فسرعة الذروة $v_D = v_C \cos \alpha$، ثمّ ننتقل من D إلى E بانحفاظ الطاقة.

1. أ)

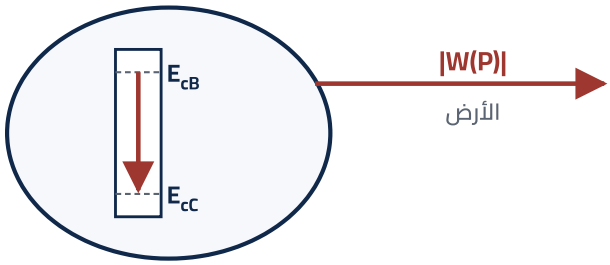


الجملة (جسم + نابض + أرض)

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g x_0 \sin \alpha$$

ب)

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = 1{,}35 - 0{,}1 = 1{,}25 \text{ J} \Rightarrow v_B = 5 \text{ m/s}$$



الجملة (جسم)

2.

$$\frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 - m g \cdot BC \cdot \sin \alpha \Rightarrow BC = (25 - 9) / (2 \times 10 \times 0{,}5) = 1{,}6 \text{ m}$$

3. أ) في C : $\vec{v}_C$ موازٍ للمستوي المائل (يصنع 30° مع الأفق) ؛ في D : $\vec{v}_D$ أفقي. ب)

$$v_D = v_C \cos\alpha = 3 \times 0{,}866 \approx 2{,}6 \text{ m/s}$$

$$\tfrac{1}{2} m v_E^2 = \tfrac{1}{2} m v_D^2 + m g h_D \Rightarrow v_E = \sqrt{(6{,}75 + 60)} \approx 8{,}2 \text{ m/s}$$

انتبه : خطأ شائع

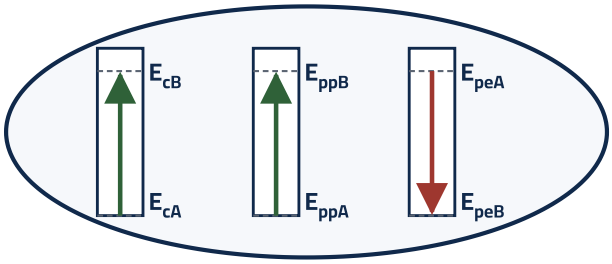
في الذروة السرعة **ليست معدومة** : تنعدم مركّبتها الشاقولية فقط.

حلّ التمرين 16

توجيه منهجي

الجملة (جسم + نابض + أرض) معزولة طاقويا : $E_{peA} = E_{cB} + E_{ppB} = E_{ppC}$. في C السرعة معدومة لأنّ الجسم يتحرّك شاقوليا.

1.



الجملة (جسم + نابض + أرض)

$$\tfrac{1}{2} k x_0^2 = \tfrac{1}{2} m v_B^2 + m g r = 25 + 5 = 30 \text{ J}$$

$$x_0 = \sqrt{(2 \times 30 / 240)} = 0{,}5 \text{ m}$$

2. $$\tfrac{1}{2} k x_0^2 = m g h_C \Rightarrow h_C = 30 / (0{,}5 \times 10) = 6 \text{ m}$$

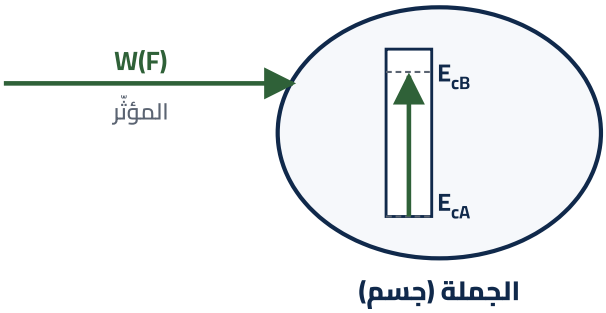
حلّ التمرين 17

توجيه منهجي

على AB : $\vec{F}$ هي القوة الوحيدة التي تعمل ($W(\vec{P}) = 0$). من B إلى D : تحوّل E_c إلى E_{pp}. ارتفاع C : $r\,(1 - \cos\theta)$.

1. الثقل $\vec{P}$، رد الفعل $\vec{R}$ (عمودي، لا احتكاك) والقوة $\vec{F}$ الأفقية.

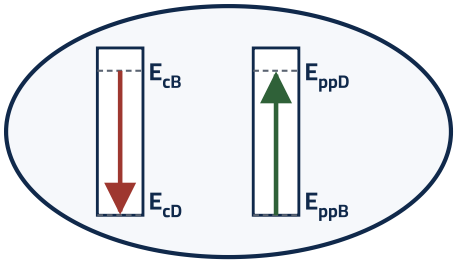
2. أ)



ب)

$$0 + F \cdot d = \tfrac{1}{2}\, m\, v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{(2\, F\, d / m)}$$

3. أ)



الجملة (جسم + أرض)

ب)

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = m g h \Rightarrow v_B = \sqrt{2 g h}$$

ج)

$$2 F d / m = 2 g h \Rightarrow F = m g h / d = 5 \times 10 \times 2{,}8 / 0{,}1 = 1{,}4 \times 10^3 \text{ N}$$

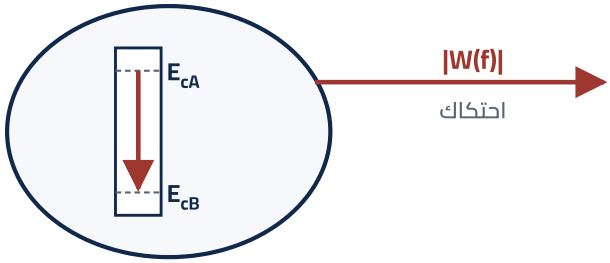
4. $$v_C = \sqrt{v_B^2 - 2 g r (1 - \cos\theta)} = \sqrt{56 - 5{,}36} \approx 7{,}1 \text{ m/s}$$

حلّ التمرين 18

توجيه منهجي

على **AB** الأفقي، الاحتكاك هو القوة الوحيدة التي تعمل. على القوس : الجسم ينزل من **B** (أعلى القوس، على البعد **r** من **O**) إلى **C** (على الارتفاع **r sin α** فوق **O**) : **$h = r(1 - \sin\alpha)$**.

1. تتناقص السرعة لأنّ قوى الاحتكاك (عملها مقاوم) تستهلك جزءا من الطاقة الحركية. القوى : $\vec{P}$، و$\vec{R}$ المائل نحو الخلف.



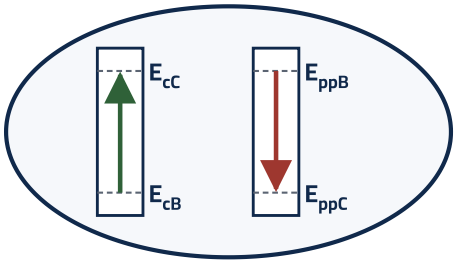
الجملة (جسم)

2.

$$\Sigma W = E_{cB} - E_{cA} = \tfrac{1}{2} \times 0{,}2 \times (4 - 9) = -0{,}5\ \text{J}$$

3. $$-f \cdot d = -0{,}5 \Rightarrow f = 0{,}5 / 2 = 0{,}25\ \text{N}$$

4. أ)



الجملة (جسم + أرض)

ب)

$$\tfrac{1}{2} m v_B^2 + m g r (1 - \sin\alpha) = \tfrac{1}{2} m v_C^2$$

، ومنه :

$$v_C = \sqrt{(2 g r (1 - \sin\alpha) + v_B^2)} = \sqrt{(8{,}04 + 4)} \approx 3{,}47\ \text{m/s}$$

ج) المماس في C يميل بـ $90° - \alpha = 30°$: ينزل الجسم $CD \sin 30° = 1\ \text{m}$.

$$v_D = \sqrt{(v_C^2 + 2 g \times 1)} = \sqrt{(12{,}04 + 20)} \approx 5{,}66\ \text{m/s}$$

حلّ التمرين 19

توجيه منهجي

بيان $E_{pt} = f(\theta^2)$ مستقيم يمرّ بالمبدأ : ميله $a = C / 2$. ثمّ انحفاظ الطاقة الميكانيكية $\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 = \frac{1}{2} C \theta_m^2$.

1. $E_{pt} = a \cdot \theta^2 \; ; \; a = 0{,}05 / 2{,}5 = 0{,}02 \text{ J/rad}^2$

بالمطابقة مع $E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2$:

$$C = 2a = 4 \times 10^{-2} \text{ N·m/rad}$$

2. أ)

$$E_m = \frac{1}{2} C \theta_m^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}04 \times 1 = 2 \times 10^{-2} \text{ J}$$

ب) ω عظمى عندما تنعدم E_{pt}، أي عند وضع التوازن $(\theta = 0)$:

$$\omega_{max} = \sqrt{(2 E_m / J_\Delta)} = \sqrt{(0{,}04 / 2 \times 10^{-3})} = \sqrt{20} \approx 4{,}47 \text{ rad/s}$$

3. $\mathcal{M} = C \theta = 0{,}04 \times 0{,}5 = 2 \times 10^{-2} \text{ N·m}$

$$E_c = E_m - \frac{1}{2} C \theta^2 = 0{,}02 - 0{,}005 = 1{,}5 \times 10^{-2} \text{ J} \Rightarrow \omega = \sqrt{(2 \times 0{,}015 / 0{,}002)} \approx 3{,}87 \text{ rad/s}$$

تابعوا الأستاذ

الأستاذ تبيب حكيم

دروس، تمارين محلولة وفيديوهات شرح لتلاميذ الثانوي وفق المنهاج الجزائري

المنصّة التعليمية	www.tebibphysique.com
يوتيوب	youtube.com/@tebibhakim3108
تيك توك	tiktok.com/@tebibhakim2
إنستغرام	instagram.com/physiquetebib
فيسبوك	facebook.com/hakimb.tebib
تيليغرام (القناة)	t.me/tebibphysique
تيليغرام (المجموعة)	t.me/tebib1971

الأستاذ تبيب حكيم — السنة الثانية ثانوي — رياضيات وتقني رياضي