الميكانيك والطاقة — الوحدة 03

# العمل والطاقة الحركية

## في الحركة الدورانية

الدرس · الملخّص · 24 تمرينا متدرّجا · الحلول المفصّلة

الأستاذ تيبب حكيم

السنة الثانية ثانوي — رياضيات وتقني رياضي

فهرس

# المحتويات


| | | |
|---|---|---|
| الجزء الأول | **الدرس**<br>الحركة الدورانية، عزم قوة، عزم العطالة، التوازن، عمل المزدوجة والاستطاعة، الطاقة الحركية الدورانية | 3 |
| الجزء الثاني | **ملخّص الدرس**<br>العلاقات الأساسية، عزم العطالة، مقارنة الانسحاب والدوران، الحصيلة الطاقوية والأخطاء الشائعة | 19 |
| الجزء الثالث | **سلسلة التمارين**<br>المستوى 1 : تطبيق مباشر (1–8) · المستوى 2 : تثبيت (9–16) · المستوى 3 : تعمّق (17–24) | 22 |
| الجزء الرابع | **الحلول المفصّلة**<br>حلّ كلّ تمرين مسبوقا بتوجيه منهجي، مع التنبيه إلى الأخطاء الشائعة | 38 |
| | **تابعوا الأستاذ**<br>المنصّة وقنوات التواصل | 65 |


### كيف تستعمل هذا الكتاب ؟

1. اقرأ **الدرس** مع أمثلته المحلولة، ثمّ احفظ **الملخّص** والعلاقات المؤطّرة.
2. أنجز التمارين **بالترتيب** : المستوى 1 ثمّ 2 ثمّ 3، على كرّاسك وقبل النظر في الحلول.
3. عند التصحيح اقرأ أوّلا **التوجيه المنهجي** : هو الطريقة التي تصلح لكلّ التمارين المشابهة.
4. راجع إطارات «**انتبه : خطأ شائع**» : أغلب النقاط الضائعة في الفروض تأتي منها.

الجزء الأول

# الدرس

الحركة الدورانية · عزم قوة · عزم العطالة · التوازن · عمل المزدوجة · الطاقة الحركية الدورانية

**ماذا سأتعلّم في هذه الوحدة ؟**

- أحسب **السرعة الزاوية** و**السرعة الخطية** لجسم صلب يدور حول محور ثابت.
- أحسب **عزم قوة** بالنسبة لمحور ثابت، وأميّز **المزدوجة**.
- أحسب **عزم عطالة** جسم صلب، وأوظّف **مبرهنة هويغنز**.
- أطبّق **شرطي التوازن** على جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت.
- أحسب **عمل** قوة أو مزدوجة في الحركة الدورانية، وأحسب **الاستطاعة**.
- أحسب **الطاقة الحركية الدورانية**، وأوظّف **مبدأ انحفاظ الطاقة** لإيجاد سرعة زاوية أو عزم أو عدد دورات.

## 1. الحركة الدورانية لجسم صلب

### 1.1 تعريف

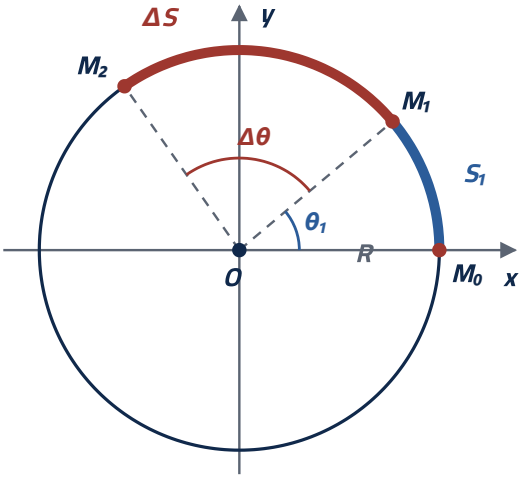
**تعريف**

يكون جسم صلب في **حركة دورانية حول محور ثابت (Δ)** إذا وصفت **كلّ نقطة** منه (ما عدا النقاط الواقعة على المحور) مسارا دائريا **مركزه على المحور** ومستويه عمودي عليه. أمثلة : مروحة، عجلة دولاب، باب حول مفصلاته، بكرة.

تُوصف حركة النقطة المادية على مسارها الدائري بمقدارين متكاملين :

### 1.2 الفاصلة المنحنية والفاصلة الزاوية

ينتقل جسم نقطي من الموضع $M_1$ في اللحظة $t_1$ إلى الموضع $M_2$ في اللحظة $t_2$ على دائرة نصف قطرها $R$ :




القوس المقطوع **ΔS** والزاوية الممسوحة **Δθ** بين اللحظتين $t_1$ و$t_2$

- **الفاصلة المنحنية S** : طول القوس المقطوع (المسافة المقطوعة على المسار)، بالمتر **(m)** ؛ $\Delta S = S_2 - S_1$.
- **الفاصلة الزاوية θ** : قيس الزاوية التي يمسحها نصف القطر، بالراديان **(rad)** ؛ $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

**العلاقة بين الفاصلتين**

$$S = R \cdot \theta$$

**S** بالمتر، **R** نصف قطر المسار بالمتر، **θ بالراديان** (وليس بالدرجات).

- دورة واحدة : $\theta = 2\pi$ rad و$S = 2\pi R$ (محيط الدائرة).
- التحويل : $180° \leftrightarrow \pi$ rad ، أي $\theta\,(\text{rad}) = \theta\,(°) \times \pi / 180$.
- عدد الدورات **N** يعطي الزاوية الممسوحة : $\Delta\theta = 2\pi \cdot N$.

## 1.3 السرعة الزاوية والسرعة الخطية

| السرعة الزاوية | السرعة الخطية | العلاقة بينهما |
|---|---|---|
| $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ | $v = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ | $v = R \cdot \omega$ |
| **ω** بـ **rad/s** ، **Δθ** بالراديان | **v** بـ **m/s** ، **ΔS** بالمتر | **R** نصف قطر المسار بالمتر |

- **الدور T** : المدّة الزمنية لإنجاز دورة واحدة : $T = 2\pi / \omega$ بالثانية.
- **التواتر n** : عدد الدورات في وحدة الزمن. إذا أُعطي بـ **tr/min** فإنّ : $\omega = 2\pi \cdot n / 60$ (لأنّ كلّ دورة تُعطي **2π rad** والدقيقة **60 s**).
- في الحركة الدورانية المنتظمة تكون **ω** ثابتة، ومنه $\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t$.

**جسم صلب يدور حول محور ثابت**

كلّ نقاط الجسم تمسح **نفس الزاوية** في نفس المدّة، فلها **نفس السرعة الزاوية ω**. أمّا سرعتها الخطية $v = R\cdot\omega$ فتتناسب مع **بعد النقطة عن المحور** : النقطة الأبعد تقطع مسافة أكبر في نفس المدّة.

**تطبيق 01**

يدور قرص نصف قطره **R = 20 cm** بتواتر **n = 300 tr/min** حول محور ثابت. أحسب سرعته الزاوية، والسرعة الخطية لنقطة من حافته، ودور الحركة.

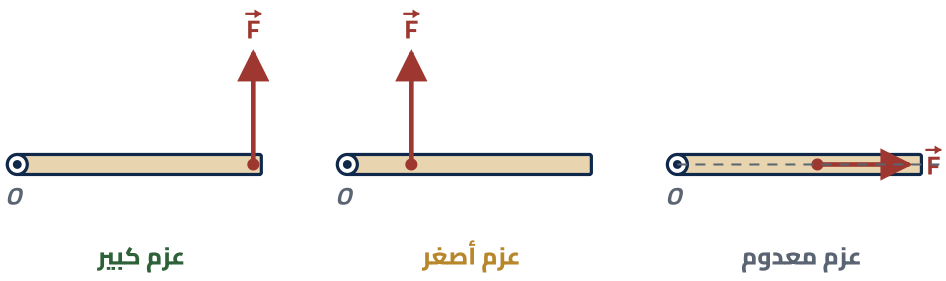
$$\omega = 2\pi \times 300 / 60 = 10\pi \approx 31{,}4 \text{ rad/s}$$

$$v = R \cdot \omega = 0{,}20 \times 31{,}4 \approx 6{,}28 \text{ m/s}$$

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi / 31{,}4 = 0{,}20 \text{ s}$$

## 2. عزم قوة بالنسبة لمحور ثابت

### 2.1 نشاط : فتح باب

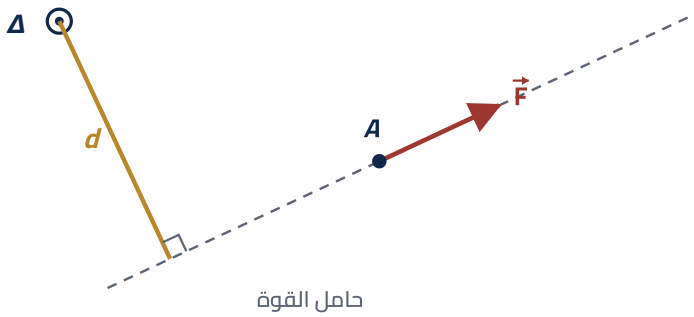



باب يدور حول محور شاقولي (منظر من الأعلى) : نغيّر نقطة تطبيق القوة واتجاهها

- كلّما **ابتعدت** نقطة تطبيق القوة عن محور الدوران كان فتح الباب **أسهل**.
- القوة **العمودية** على الباب أفعل من القوة المائلة.
- القوة التي **حاملها يقطع المحور** أو **يوازيه** لا تدير الباب إطلاقا.

**الاستنتاج :** الأثر الدوراني لقوة على جسم قابل للدوران يتعلّق **بشدّتها** و**ببُعد حاملها عن المحور**. نسمّي هذا الأثر **عزم القوة**.

## 2.2 العبارة




ذراع القوة **d** : البعد العمودي بين المحور وحامل القوة

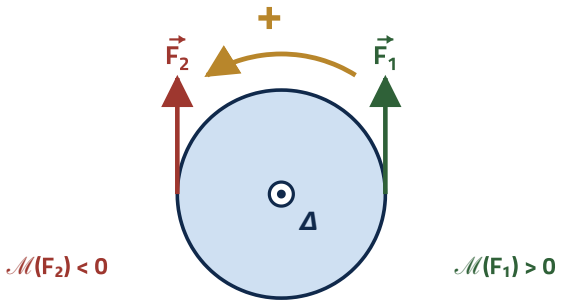
**عزم قوة بالنسبة لمحور (Δ)**

قوة $\vec{F}$ تؤثّر في مستوٍ عمودي على المحور **(Δ)**. عزمها بالنسبة للمحور هو :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \pm F \cdot d$$

- $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F})$ : عزم القوة، وحدته **النيوتن·متر (N·m)** (وليست الجول).
- **F** : شدّة القوة بالنيوتن **(N)**.
- **d** : **ذراع القوة**، وهو البعد **العمودي** بين المحور وحامل القوة، بالمتر **(m)**.

- **الإشارة :** نختار **منحى موجبا** للدوران. عزم القوة **موجب** إذا كانت القوة تدير الجسم في المنحى الموجب، **وسالب** إذا أدارته في المنحى المعاكس.
- إذا كان **حامل القوة يقطع المحور** أو **يوازيه** فإنّ **d = 0** وعزمها **معدوم**.
- إذا صنعت القوة زاوية **α** مع المستقيم الذي يصل نقطة تطبيقها بالمحور (طوله $\ell$) فإنّ **$d = \ell \cdot \sin\alpha$**.




القوة $F_1$ تدير الجسم في المنحى الموجب، والقوة $F_2$ في المنحى المعاكس

### عزم عدّة قوى

إذا خضع الجسم لعدّة قوى فإنّ **مجموع عزومها** (جبريا) هو :

$$\Sigma \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F_1}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F_2}) + \ldots + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F_n})$$

### تطبيق 02

مفتاح ربط طوله $\ell = 25\ cm$ تؤثّر عليه يد بقوة شدّتها $F = 80\ N$ عند طرفه. أحسب عزم القوة بالنسبة لمحور البرغي في حالتين : القوة عمودية على المفتاح، ثمّ القوة مائلة عنه بالزاوية $60°$.

**القوة عمودية : $d = \ell$**

$$\mathcal{M} = F \cdot \ell = 80 \times 0{,}25 = 20\ N{\cdot}m$$

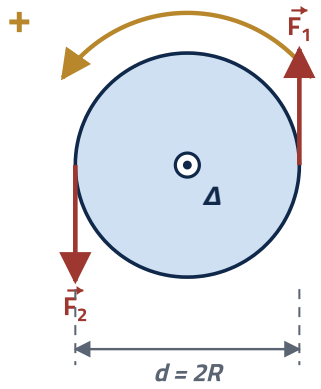
**القوة مائلة بالزاوية $60°$ :**

$$d = \ell \cdot \sin 60° = 0{,}25 \times 0{,}866 \approx 0{,}217\ m \Rightarrow \mathcal{M} = F \cdot d = 80 \times 0{,}217 \approx 17{,}3\ N{\cdot}m$$

## 2.3 المزدوجة

### تعريف

**المزدوجة** جملة قوتين $\vec{F_1}$ و$\vec{F_2}$ متساويتين في الشدّة، متعاكستين في الجهة، حاملاهما متوازيان وغير منطبقين (مجموعهما الشعاعي معدوم). مثال : يدا شخص تديران مقودا.




مزدوجة قوتين مماسيتين تؤثّران على عجلة

لكلّ من القوتين نفس إشارة العزم، فعزم المزدوجة هو مجموع عزميهما :

**عزم مزدوجة**

$$\mathcal{M}_{\Delta} = F \cdot R + F \cdot R = F \cdot d$$

**F** شدّة كلّ قوة، و**d ذراع المزدوجة** : المسافة بين حاملي القوتين (في الشكل **d = 2R**).

- عزم المزدوجة **لا يتعلّق بموضع المحور** في المستوي : تدير المزدوجة الجسم بنفس العزم مهما كان موضع المحور العمودي على مستويها.
- لأنّ مجموع القوتين معدوم، لا تحرّك المزدوجة مركز عطالة الجسم : **تُحدث دورانا فقط.**

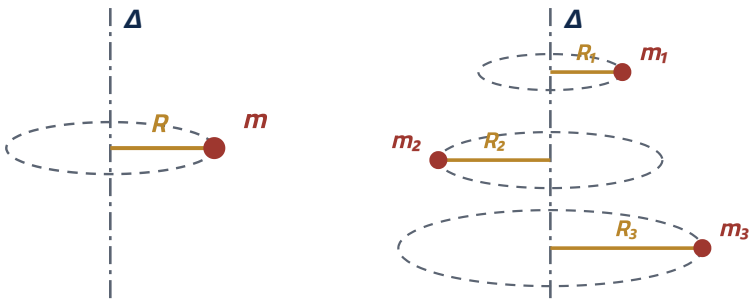
## 3. عزم عطالة جسم صلب

### 3.1 ملاحظة

نحرّك بدفعة واحدة عجلة دراجة، ثمّ عجلة شاحنة : يصعب تدوير الثانية وإيقافها. **تقاوم الأجسام تغيير حركتها الدورانية** بمقدار يتعلّق بـ **كتلتها** وبتوزيع **هذه الكتلة حول المحور** : فكلّما ابتعدت الكتلة عن المحور ازدادت هذه المقاومة. نقيس هذه الخاصية بعزم العطالة $J_{\Delta}$.

**مركز العطالة G** لجسم صلب هو النقطة الوحيدة التي لها حركة مستقيمة منتظمة عندما تكون الجملة معزولة. وفي الأجسام المتجانسة ينطبق على مركز التناظر (مركز القرص، منتصف الساق...).

## 3.2 جسم نقطي وجملة نقاط




يسار : نقطة مادية. يمين : جملة نقاط مادية على أبعاد مختلفة عن المحور

### عزم العطالة

عزم عطالة نقطة مادية كتلتها **m** على بعد **R** من المحور **(Δ)** :

$$J_\Delta = m \cdot R^2$$

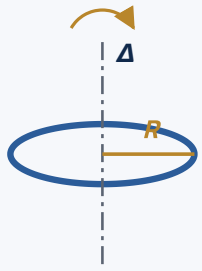
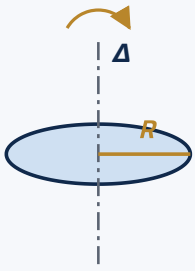
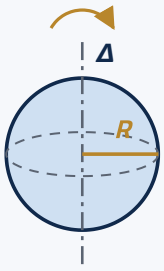
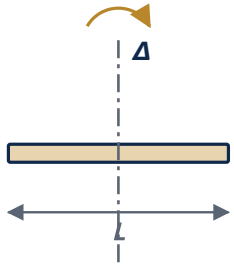
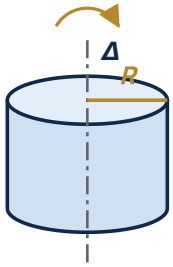
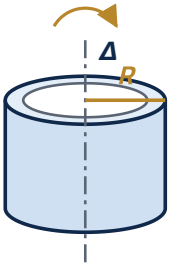
وعزم عطالة جملة نقاط مادية هو **مجموع** عزوم عطالة نقاطها بالنسبة لنفس المحور :

$$J_\Delta = \Sigma\, m_i \cdot R_i^2 = m_1 R_1^{\,2} + m_2 R_2^{\,2} + \dots$$

الوحدة : $kg \cdot m^2$ **.** **m** بالكيلوغرام، **R** بالمتر.

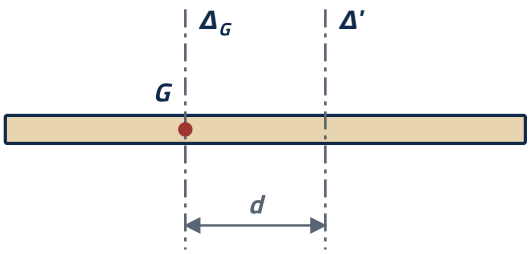
وبالتالي فإنّ عزم عطالة جملة مكوّنة من عدّة أجسام صلبة بالنسبة لمحور واحد هو **مجموع عزوم عطالة أجزائها.**

## 3.3 عزم عطالة أجسام متجانسة معروفة

| حلقة | قرص | كرة مصمتة |
|---|---|---|
|   |   |   |
| $J_\Delta = m\,R^2$ | $J_\Delta = \frac{1}{2}\,m\,R^2$ | $J_\Delta = \frac{2}{5}\,m\,R^2$ |
| **ساق متجانسة** | **أسطوانة مصمتة** | **أسطوانة مجوّفة** |
|   |   |   |
| $J_\Delta = \frac{1}{12}\,m\,L^2$ | $J_\Delta = \frac{1}{2}\,m\,R^2$ | $J_\Delta = m\,R^2$ |

المحور **(Δ)** يمرّ بمركز عطالة الجسم : عمودي على الحلقة والقرص، شاقولي في الساق (عمودي عليها)، ومحور تناظر الأسطوانة. نصف القطر **R**، والطول **L**.

## 3.4 مبرهنة هويغنز




محوران متوازيان : **$(\Delta_G)$** يمرّ بمركز العطالة **G** و**(Δ')** يبعد عنه بالمسافة **d**

### مبرهنة هويغنز

عزم عطالة جسم كتلته **m** بالنسبة لمحور **(Δ′) لا يمرّ بمركز عطالته** ويوازي المحور **$(\Delta_G)$** المارّ بمركز العطالة ويبعد عنه بالمسافة **d** هو :

$$J_{\Delta'} = J_{\Delta_G} + m \cdot d^2$$

### انتبه : خطأ شائع

لا تُطبَّق مبرهنة هويغنز إلاّ انطلاقا من عزم العطالة بالنسبة لمحور يمرّ **بمركز العطالة G**. وعزم العطالة بالنسبة لمحور آخر دائما **أكبر** من $J_{\Delta_G}$.

### تطبيق 03

ساق متجانسة طولها $L = 0,5\ m$ وكتلتها $m = 0,4\ kg$. أحسب عزم عطالتها بالنسبة لمحور عمودي عليها يمرّ بأحد طرفيها.

$J_{\Delta_G} = (1/12)\, m\, L^2 = (1/12) \times 0,4 \times 0,25 \approx 8,33\times10^{-3}\ kg\cdot m^2$ ؛ المحور يبعد عن G بالمسافة : $d = L/2 = 0,25\ m$

$$J_\Delta = J_{\Delta_G} + m\, d^2 = 8,33\times10^{-3} + 0,4 \times 0,25^2 \approx 3,33\times10^{-2}\ kg\cdot m^2$$

وهي النتيجة $J_\Delta = (1/3)\, m\, L^2$ للساق التي تدور حول طرفها.

## 4. توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت

### شرطا توازن جسم صلب خاضع لقوى خارجية

- الشرط الأول (انسحابي) : المجموع الشعاعي للقوى الخارجية معدوم : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$.
- الشرط الثاني (دوراني) : المجموع الجبري لعزوم القوى الخارجية بالنسبة لأيّ محور معدوم : $\Sigma \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = 0$.

عندما يكون الجسم قابلا للدوران حول محور ثابت، فإنّ **ردّ فعل المحور $\vec{R}$ مجهول** في الاتجاه والشدّة، لكنّ عزمه بالنسبة للمحور **معدوم** لأنّ حامله يقطع المحور. لذلك نطبّق **الشرط الثاني أوّلا** فنحصل مباشرة على شدّة قوة مجهولة، ثمّ نطبّق الشرط الأول لإيجاد $\vec{R}$.

### توجيه منهجي

**منهجية :** (1) مثّل **كلّ** القوى (الثقل في مركز العطالة، التوتّرات، ردّ فعل المحور). (2) اختر المحور واتجاها موجبا. (3) اكتب $\Sigma \mathcal{M} = 0$ (ردّ فعل المحور لا يظهر). (4) اسقط الشرط $\Sigma F = 0$ على محورين لإيجاد مركبتي $\vec{R}$.

### تطبيق 04

عارضة متجانسة **AB** طولها $L = 2\ m$ وكتلتها $m = 10\ kg$ قابلة للدوران حول محور أفقي يمرّ بالطرف **A**، تُحفظ أفقية بواسطة خيط شاقولي مشدود في **B**. نعلّق في النقطة **C** حيث $AC = 1{,}5\ m$ جسما كتلته $m' = 4\ kg$. نأخذ $g = 10\ N/kg$. أحسب توتّر الخيط **T** وردّ فعل المحور **R**.

الشرط الثاني بالنسبة للمحور المارّ بـ**A** (ثقل العارضة في منتصفها، وردّ فعل المحور عزمه معدوم) :

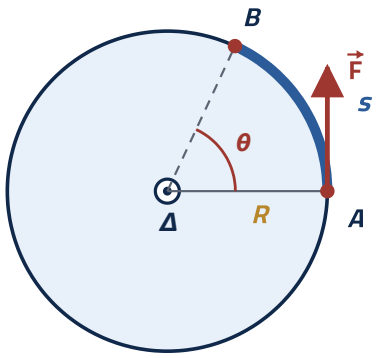
$$T \cdot L - m\,g \cdot (L/2) - m'\,g \cdot AC = 0 \Rightarrow T = (100 \times 1 + 40 \times 1{,}5) / 2 = 80\ N$$

الشرط الأول على المحور الشاقولي :

$$R + T = m\,g + m'\,g \Rightarrow R = 140 - 80 = 60\ N$$

# 5. عمل قوة (أو مزدوجة) في الحركة الدورانية — الاستطاعة

## 5.1 عمل قوة مماسية




قوة مماسية ثابتة على عجلة : تتحرّك نقطة تطبيقها من **A** إلى **B** على القوس **s**

تؤثّر قوة $\vec{F}$ **ثابتة الشدّة، مماسية** للعجلة (نصف قطرها **R**)، فتمسح العجلة الزاوية **θ**. نقطة تطبيق القوة تقطع القوس $s = R \cdot \theta$ في اتجاه القوة، فعمل القوة :

$$W(F) = F \cdot s = F \cdot R \cdot \theta = \mathcal{M}_{\Delta}(F) \cdot \theta$$

**عمل قوة عزمها ثابت**

$$W(\vec{F}) = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \Delta\theta$$

- **W** بالجول **(J)** ؛ $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F})$ بـ **N·m** ؛ **Δθ** بالراديان.
- عمل **مزدوجة** عزمها $\mathcal{M}$ : $W = \mathcal{M} \cdot \Delta\theta$.
- العمل **محرّك** (موجب) إذا كان العزم في **منحى الدوران**، **ومقاوم** (سالب) إذا كان في المنحى المعاكس (كعزم الاحتكاك).

- القوى التي **عزمها معدوم** (ردّ فعل المحور، ثقل جسم يدور حول محور يمرّ بمركز عطالته) **عملها معدوم**.
- تحويل : **N** دورة تعني $\Delta\theta = 2\pi N$.

### 5.2 الاستطاعة

**استطاعة قوة (أو مزدوجة) تدير جسما صلبا**

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \mathcal{M} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \mathcal{M} \cdot \omega$$

$P$ بالواط (W)، $\mathcal{M}$ بـ N·m، $\omega$ بـ rad/s.

**تطبيق 05**

محرّك يطبّق على محوره مزدوجة عزمها $\mathcal{M} = 12\ N{\cdot}m$، فيدور بتواتر $n = 1500\ tr/min$. أحسب استطاعته، وعمله خلال $10\ s$.

$$\omega = 2\pi \times 1500 / 60 \approx 157\ rad/s \Rightarrow P = \mathcal{M} \cdot \omega = 12 \times 157 \approx 1{,}88{\times}10^{3}\ W$$

$$W = P \cdot \Delta t = 1{,}88{\times}10^{3} \times 10 \approx 1{,}88{\times}10^{4}\ J$$

تحقّق : $\Delta\theta = \omega{\cdot}\Delta t = 1570\ rad$ و $W = \mathcal{M}{\cdot}\Delta\theta = 12 \times 1570 \approx 1{,}88{\times}10^{4}\ J$ ✓.

## 6. الطاقة الحركية الدورانية

جسم صلب يدور حول محور ثابت بسرعة زاوية $\omega$. نقسّمه إلى نقاط مادية صغيرة كتلتها $m_i$ على أبعاد $R_i$ من المحور، سرعة كلّ منها $v_i = R_i{\cdot}\omega$. طاقته الحركية مجموع الطاقات الحركية لنقاطه :

$$E_c = \Sigma\ \tfrac{1}{2}\, m_i\, v_i^{2} = \tfrac{1}{2}\,(\Sigma\, m_i\, R_i^{2})\,\omega^{2}$$

**الطاقة الحركية الدورانية**

$$E_c = \tfrac{1}{2} \cdot J_\Delta \cdot \omega^{2}$$

$E_c$ بالجول (J)، $J_\Delta$ بـ $kg{\cdot}m^2$، $\omega$ بـ rad/s.

- إذا تضاعفت السرعة الزاوية تضاعفت الطاقة الحركية أربع مرّات.

- لنقطة مادية $J = mR^2$ و$v = R\omega$ فنجد من جديد $E_c = \frac{1}{2} m v^2$. ✓
- لجسم صلب في حركة **انسحابية ودورانية معا** (كأسطوانة تتدحرج) : $E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta_G} \omega^2$.

**تطبيق 06**

دولاب عطالة عزم عطالته $J_\Delta = 0{,}5\ kg{\cdot}m^2$ يدور بتواتر **600 tr/min**. ما طاقته الحركية ؟

$$\omega = 2\pi \times 600 / 60 \approx 62{,}8\ rad/s \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \times 0{,}5 \times 62{,}8^2 \approx 9{,}9\times10^2\ J$$

## 7. العمل والطاقة الحركية : مبدأ انحفاظ الطاقة

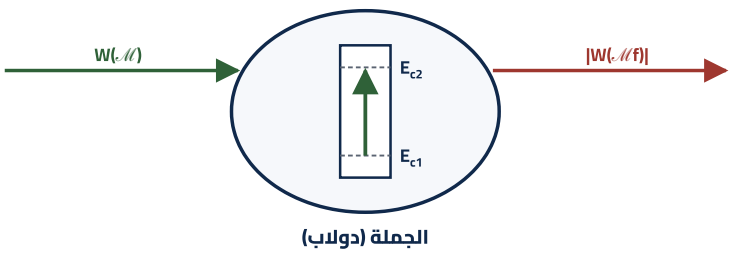
**معادلة انحفاظ الطاقة (جملة صلبة تدور)**

تغيّر الطاقة الحركية لجسم صلب بين لحظتين يساوي **المجموع الجبري** لأعمال القوى الخارجية المطبّقة عليه بين هاتين اللحظتين :

$$E_{c1} + \Sigma W = E_{c2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} J_\Delta \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_\Delta \omega_1^2 = \Sigma \mathcal{M} \cdot \Delta\theta$$

- $\Sigma W > 0$ : الجسم **يكتسب** طاقة، فتزداد سرعته الزاوية.
- $\Sigma W < 0$ : الجسم **يفقد** طاقة، فتتناقص سرعته الزاوية.
- $\Sigma W = 0$ : السرعة الزاوية **ثابتة**.

**الحصيلة الطاقوية :** نرسم الجملة في فقاعة وفيها عمود $E_c$، الأعمال **المحرّكة** بأسهم **داخلة** من اليسار، والأعمال **المقاومة** بأسهم **خارجة** نحو اليمين.




الجملة (دولاب)

مثال : دولاب يدور تحت تأثير مزدوجة محرّكة وعزم احتكاك

### توجيه منهجي

**منهجية :** (1) حدّد الجملة (جسم صلب يدور، أو جسم صلب + أجسام معلّقة) والموضعين الابتدائي والنهائي. (2) مثّل القوى وحدّد عزمها (أو انتقالها). (3) احسب عمل كلّ قوة بإشارته : $W = \mathcal{M}\cdot\Delta\theta$ للدوران، $W = \pm mgh$ للثقل. (4) مثّل الحصيلة الطاقوية واكتب $E_{c1} + \Sigma W = E_{c2}$. (5) استخرج المجهول حرفيا ثمّ عوّض بالأرقام مع الوحدات.

### مثال محلول 07 : جسم يدور فقط

أسطوانة عزم عطالتها $J_\Delta = 0{,}2\ kg\cdot m^2$ تنطلق من السكون تحت تأثير عزم محرّك ثابت $\mathcal{M} = 5\ N\cdot m$ فتنجز **8 دورات**، مع عزم احتكاك ثابت $\mathcal{M}_f = 1\ N\cdot m$. أحسب سرعتها الزاوية النهائية.

الجملة : الأسطوانة. الزاوية الممسوحة : $\Delta\theta = 2\pi \times 8 = 16\pi \approx 50{,}3\ rad$. ردّ فعل المحور وثقل الأسطوانة (محورها يمرّ بمركز عطالتها) عملهما معدوم.

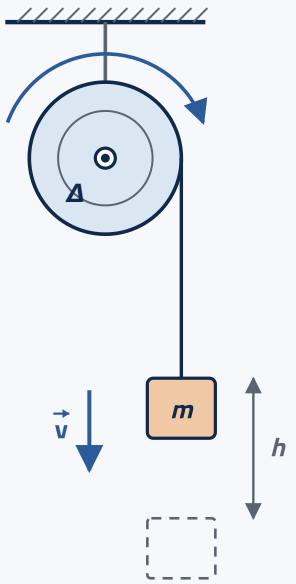
$$E_{c1} + W(\mathcal{M}) + W(\mathcal{M}_f) = E_{c2} \Rightarrow 0 + (5 - 1) \times 50{,}3 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}2 \times \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{2 \times 201 / 0{,}2} = \sqrt{2{,}01\times10^3} \approx 44{,}8\ rad/s$$

أي تواتر $n = 60\,\omega / 2\pi \approx 428\ tr/min$.

### مثال محلول 08 : بكرة وجسم معلّق

بكرة عزم عطالتها $J_\Delta = 10^{-2}\ kg{\cdot}m^2$ ونصف قطرها $r = 0{,}1\ m$، يلتفّ على محيطها خيط لا يمتدّ ولا ينزلق، يحمل جسما كتلته $m = 0{,}5\ kg$ يُترك دون سرعة ابتدائية. أحسب سرعة الجسم وسرعة البكرة الزاوية بعد نزوله $h = 1{,}2\ m$ (نهمل الاحتكاك، $g = 10\ N/kg$).




الجملة (بكرة + جسم) : الجسم في حركة انسحابية والبكرة في حركة دورانية

الخيط لا ينزلق : $v = r{\cdot}\omega$. طاقة الجملة الحركية :

$$E_c = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 + \tfrac{1}{2}\, J_\Delta\, \omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(m + J_\Delta / r^2\right) v^2$$

القوى الخارجية : ثقل الجسم $(W = mgh)$، وثقل البكرة وردّ فعل المحور (عملهما معدوم). عمل قوتي الخيط على الجسم وعلى البكرة **يلغي بعضهما** (الخيط غير ممتدّ ولا ينزلق).

$$\tfrac{1}{2}\left(m + J_\Delta / r^2\right) v^2 = m\, g\, h \Rightarrow v = \sqrt{2\, m\, g\, h \,/\, \left(m + J_\Delta / r^2\right)}$$

$$J_\Delta / r^2 = 10^{-2} / 10^{-2} = 1\ kg \Rightarrow v = \sqrt{2 \times 0{,}5 \times 10 \times 1{,}2 \,/\, 1{,}5} = \sqrt{8} \approx 2{,}8\ m/s$$

$$\omega = v / r = 2{,}83 / 0{,}1 \approx 28\ rad/s$$

**انتبه : خطأ شائع**

- استعمال الدرجات بدل الراديان في $S = R\theta$ و$W = \mathcal{M}\Delta\theta$، أو نسيان تحويل **tr/min** إلى **rad/s** ( $\omega = 2\pi n/60$).
- أخذ **d** (ذراع القوة) على أنّه المسافة إلى نقطة التطبيق، وهو في الحقيقة **البعد العمودي** إلى حامل القوة.
- كتابة وحدة عزم القوة بالجول، أو الخلط بين $\mathcal{M}$ (عزم) و**m** (كتلة).
- تطبيق مبرهنة هويغنز انطلاقا من محور لا يمرّ بمركز العطالة.
- نسيان الحدّ الانسحابي $\frac{1}{2}mv^2$ في طاقة جملة (بكرة + جسم معلّق).

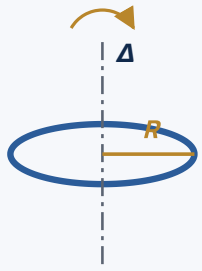
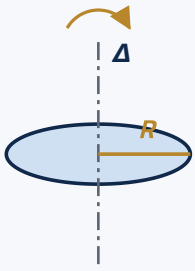
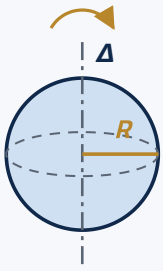
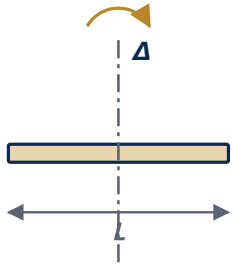
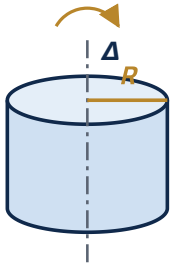
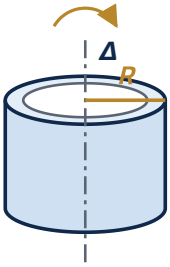
الجزء الثاني

# ملخّص الدرس

كلّ ما يجب حفظه في ثلاث صفحات

| المفهوم | العلاقة | ملاحظات |
|---|---|---|
| الفاصلة المنحنية | $S = R \cdot \theta$ | $\theta$ بالراديان ؛ دورة : $\theta = 2\pi$ |
| السرعة الزاوية | $\omega = \Delta\theta / \Delta t$ ؛ $\omega = 2\pi n / 60$ | $n$ بـ tr/min ؛ rad/s |
| السرعة الخطية | $v = R \cdot \omega$ | $\omega$ واحدة لكلّ نقاط الجسم |
| عزم قوة | $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \pm F \cdot d$ | $d$ : ذراع القوة (البعد العمودي) ؛ N·m |
| عزم مزدوجة | $\mathcal{M} = F \cdot d$ | $d$ : المسافة بين الحاملين |
| عزم العطالة | $J_{\Delta} = \Sigma\, m_i R_i^2$ | $mR^2$ : جسم نقطي ؛ $kg \cdot m^2$ |
| مبرهنة هويغنز | $J_{\Delta'} = J_{\Delta_G} + m\, d^2$ | من محور يمرّ بـ G فقط |
| شرطا التوازن | $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ و $\Sigma \mathcal{M}_{\Delta} = 0$ | $\Sigma \mathcal{M} = 0$ أوّلا (ردّ فعل المحور غائب) |
| عمل قوة / مزدوجة | $W = \mathcal{M} \cdot \Delta\theta$ | $\Delta\theta$ بالراديان ؛ J |
| الاستطاعة | $P = W / \Delta t = \mathcal{M} \cdot \omega$ | بالواط W |
| الطاقة الحركية الدورانية | $E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta}\, \omega^2$ | انسحاب + دوران : $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$ |
| انحفاظ الطاقة | $E_{c1} + \Sigma W = E_{c2}$ | $\Delta E_c = \Sigma W$ |

## عزم العطالة لأجسام متجانسة (المحور يمرّ بمركز العطالة)

| حلقة | قرص | كرة مصمتة |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $m\,R^2$ | $\frac{1}{2}\,m\,R^2$ | $\frac{2}{5}\,m\,R^2$ |
| **ساق متجانسة** | **أسطوانة مصمتة** | **أسطوانة مجوّفة** |
|  |  |  |
| $(1/12)\,m\,L^2$ | $\frac{1}{2}\,m\,R^2$ | $m\,R^2$ |

## الانسحاب والدوران : مقارنة

| حركة انسحابية | حركة دورانية |
|---|---|
| $x$ : الفاصلة | $\theta$ : الفاصلة الزاوية |
| $v$ : السرعة | $\omega$ : السرعة الزاوية |
| $m$ : الكتلة | $J_\Delta$ : عزم العطالة |
| $F$ : القوة | $\mathcal{M}$ : عزم القوة |
| $W = F \cdot d \cdot \cos\alpha$ | $W = \mathcal{M} \cdot \Delta\theta$ |
| $P = F \cdot v \cdot \cos\alpha$ | $P = \mathcal{M} \cdot \omega$ |
| $E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$ | $E_c = \frac{1}{2}\,J_\Delta\,\omega^2$ |

## إشارة عزم القوة وحالات خاصة

- اختر **منحى موجبا** للدوران : القوة التي تدير الجسم في هذا المنحى لها عزم موجب (**+F·d**)، وفي المنحى المعاكس عزم سالب (**−F·d**).
- حامل القوة **يقطع المحور** أو **يوازيه** ⇒ $\mathcal{M} = 0$ (ردّ فعل المحور، ثقل جسم محوره يمرّ بمركز عطالته).
- قوة تصنع الزاوية **α** مع المستقيم الواصل بين المحور ونقطة التطبيق (الطول **ℓ**) : $d = \ell \cdot \sin\alpha$.
- العمل $W = \mathcal{M}\cdot\Delta\theta$ : **محرّك** إذا كان العزم في منحى الدوران، **مقاوم** في المنحى المعاكس.

## الحصيلة الطاقوية لجملة تدور

- عمود $E_c$ داخل الجملة : سهم صاعد إذا زادت السرعة الزاوية، ونازل إذا نقصت.
- سهم **داخل** من اليسار لكلّ عمل محرّك، وسهم **خارج** نحو اليمين لكلّ عمل مقاوم. القوى ذات العمل المعدوم لا تُرسم.
- $\Sigma W > 0$ : تسارع دوراني ؛ $\Sigma W < 0$ : تباطؤ ؛ $\Sigma W = 0$ : **سرعة زاوية ثابتة**.

## علاقات تُستعمل كثيرا

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + \frac{2 \cdot \Sigma W}{J_\Delta}$$

- جسم صلب يتوقّف بفعل عزم احتكاك ثابت $\mathcal{M}_f$ بعد N دورة : $\frac{1}{2} J \omega_0^2 = \mathcal{M}_f \cdot 2\pi N$.
- بكرة $(J_\Delta, r)$ وجسم معلّق (m) يهبط h من السكون : $v = \sqrt{2mgh / (m + J_\Delta/r^2)}$ و $\omega = v/r$.
- الخيط لا ينزلق ولا يمتدّ : $v = r \cdot \omega$ ؛ المسافة التي يقطعها الجسم $d = r \cdot \Delta\theta$.
- تحويل : $1\ tr = 2\pi\ rad$ ؛ $180° = \pi\ rad$ ؛ $1\ g = 10^{-3}\ kg$ ؛ $1\ cm = 10^{-2}\ m$.

**انتبه : خطأ شائع**

- عدم تحويل **tr/min** إلى **rad/s** أو الدرجات إلى الراديان قبل تطبيق $S = R\theta$ أو $W = \mathcal{M}\Delta\theta$.
- أخذ ذراع القوة المسافة إلى نقطة التطبيق بدل **البعد العمودي** إلى حامل القوة.
- تطبيق هويغنز من محور لا يمرّ بمركز العطالة، أو نسيان تربيع المسافة $d^2$.
- كتابة وحدة العزم بالجول، أو نسيان إشارة عزم الاحتكاك (عمل مقاوم).
- الخلط بين $\mathcal{M}$ (عزم القوة) و**m** (الكتلة)، وبين **v** السرعة الخطية و**ω** السرعة الزاوية.

الجزء الثالث

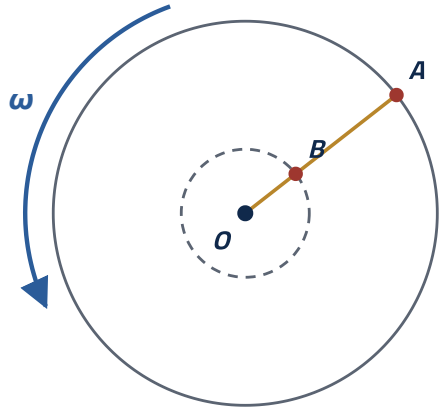
# سلسلة التمارين

أربعة وعشرون تمرينا مرتّبة من الأسهل إلى الأصعب

**المستوى 1** **تمارين تطبيقية مباشرة** الحركة الدورانية، عزم قوة، عزم العطالة

## التمرين 1 : حصانان على لعبة دوّارة

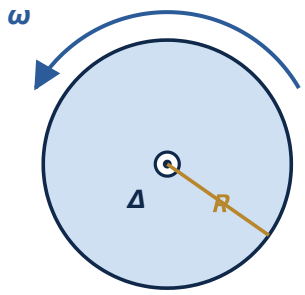
في لعبة أطفال دوّارة يوجد حصانان **A** و**B** يبعدان عن مركز الدوران **O** بالمسافتين **6 m** و**2 m** على الترتيب. تدور اللعبة بتواتر **n = 15 tr/min**.




*OA = 6 m*
*OB = 2 m*

1. أحسب السرعة الزاوية **ω** للّعبة.
2. أحسب السرعة الخطية لكلّ من الحصانين.
3. يقطع الحصان **A** مسافة **12 m** على مساره. ما المسافة التي يقطعها الحصان **B** خلال نفس المدّة ؟
4. أحسب الزاوية **θ** الممسوحة خلال هذه المدّة (بالراديان ثم بالدرجات)، ثمّ مدّة الحركة.

## التمرين 2 : قرص يدور حول محوره

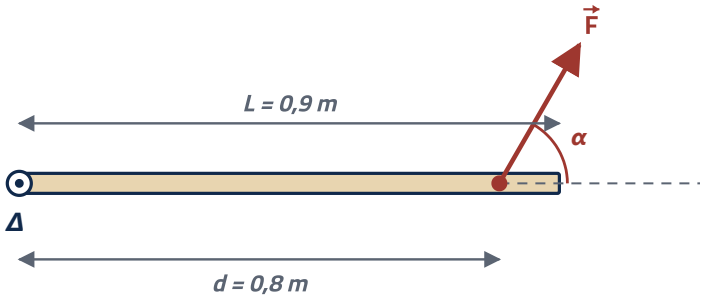



قرص متجانس كتلته $m = 2\ kg$ ونصف قطره $R = 0,2\ m$ يدور حول محور ثابت **(Δ)** عمودي عليه ويمرّ بمركزه، بتواتر $n = 300\ tr/min$. عزم عطالته بالنسبة لـ**(Δ)** هو $J_\Delta = \frac{1}{2} m R^2$.

1. أحسب عزم عطالة القرص $J_\Delta$.
2. بيّن أنّ السرعة الزاوية تُعطى بالعلاقة $\omega = 2\pi n / 60$ (حيث n بـ tr/min)، ثمّ أحسب قيمتها بـ rad/s.
3. أحسب الطاقة الحركية الدورانية للقرص.

## التمرين 3 : فتح باب

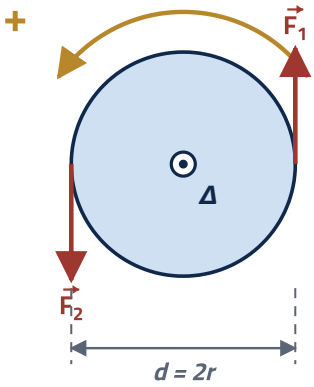
باب عرضه $L = 0,9\ m$ يدور حول محور شاقولي ثابت **(Δ)** يمرّ بمفصلاته (الشكل : منظر من الأعلى). نؤثّر على مقبضه، الذي يبعد عن المحور بالمسافة $d = 0,8\ m$، بقوة $\vec{F}$ شدّتها $F = 20\ N$ تقع في المستوي الأفقي.




1. أحسب عزم القوة $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ عندما تكون $\vec{F}$ **عمودية** على مستوي الباب.
2. أحسب عزمها عندما تصنع $\vec{F}$ الزاوية $\alpha = 60°$ مع مستوي الباب (الشكل)، علما أنّ $\mathcal{M}_\Delta(F) = F \cdot d \cdot \sin\alpha$.
3. ما قيمة الزاوية $\alpha$ التي يكون من أجلها العزم **أعظميا** ؟ علّل.
4. على أيّ مسافة $d'$ من المحور يجب أن نطبّق القوة $\vec{F}$ **عموديا** على الباب لنحصل على نفس عزم السؤال 2 ؟

## التمرين 4 : بكرة تحت تأثير مزدوجة

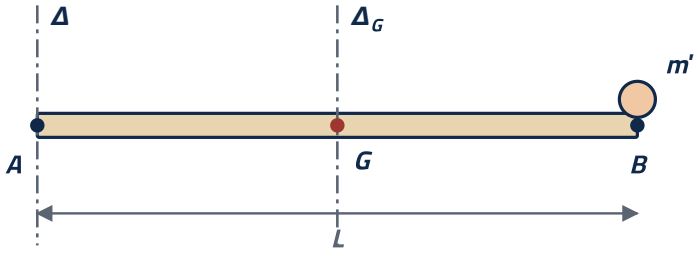
بكرة نصف قطرها $r = 0{,}2\ m$ تدور تحت تأثير مزدوجة عزمها $\mathcal{M} = 150\ N{\cdot}m$ بتواتر $n = 180\ tr/min$.




1. أحسب عمل المزدوجة عندما تنجز البكرة 120 دورة.
2. أحسب استطاعة المزدوجة.
3. تتكوّن المزدوجة من قوتين $\vec{F}_1$ و$\vec{F}_2$ متساويتين في الشدّة تؤثّران مماسيا على البكرة. أحسب شدّة كلّ منهما.

## التمرين 5 : ساق متجانسة

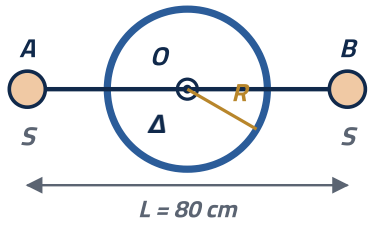
ساق متجانسة طولها $L = 0{,}6\ m$ وكتلتها $m = 0{,}3\ kg$. عزم عطالتها بالنسبة لمحور $(\Delta_G)$ عمودي عليها ويمرّ بمركز عطالتها G هو $J_{\Delta_G} = (1/12)\ m\ L^2$. نريد حساب عزم عطالتها بالنسبة لمحور $(\Delta)$ موازٍ لـ$(\Delta_G)$ ويمرّ بالطرف A.




1. أحسب $J_{\Delta_G}$.
2. أكتب نصّ مبرهنة هويغنز.
3. باستعمال المبرهنة، أوجد عبارة $J_\Delta$ بدلالة m وL، وبيّن أنّها تساوي $(1/3)\ m\ L^2$. أحسب قيمتها.
4. نثبّت في الطرف B كريّة صغيرة نعتبرها نقطية كتلتها $m' = 0{,}1\ kg$. أحسب عزم عطالة الجملة (ساق + كريّة) بالنسبة لـ$(\Delta)$.

## التمرين 6 : جملة مركّبة

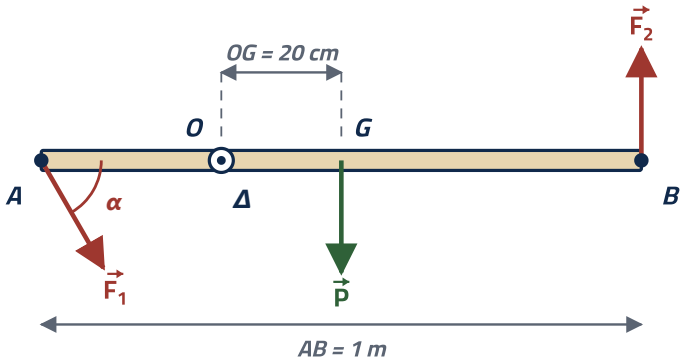
تتكوّن جملة ميكانيكية من بكرة كتلتها **M = 100 g** موزّعة بانتظام على محيطها ونصف قطرها **R = 20 cm**، تخترق مركزها **O** ساق **AB** مهملة الكتلة طولها **L = 80 cm** (مثبتة من منتصفها **O**)، وتحمل عند طرفيها كتلتين نقطيتين متماثلتين **S** كتلة كلّ منهما **m = 50 g**.




1. أحسب عزم عطالة الجملة بالنسبة لمحور أفقي **(Δ)** عمودي على مستوي البكرة ويمرّ بمركزها **O**.
2. أيّ الجزأين (البكرة أم الكتلتان) يساهم أكثر في عزم العطالة الكلّي ؟ علّل.

## التمرين 7 : قضيب خاضع لقوى

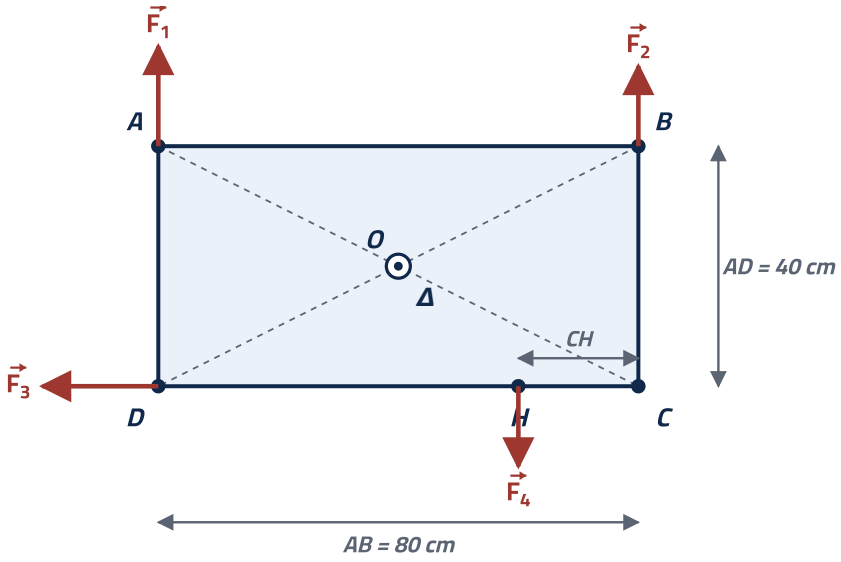
قضيب متجانس **AB** طوله **1 m** وثقله **P = 10 N**، قابل للدوران حول محور أفقي **(Δ)** عمودي على مستوي الشكل يمرّ بالنقطة **O** حيث **OA = 30 cm** و**OG = 20 cm** (**G** مركز عطالته). يوجد القضيب في وضع أفقي، ونطبّق عليه قوتين تقعان في المستوي الشاقولي : $\vec{F_1}$ في **A** شدّتها **2 N** موجّهة نحو الأسفل وتصنع مع القضيب الزاوية **α = 60°**، و$\vec{F_2}$ في **B** شدّتها **1,5 N** **عمودية** على القضيب ونحو الأعلى. نعتبر المنحى الموجب عكس دوران عقارب الساعة.




1. أحسب عزم كلّ قوة ($\vec{F_1}$، $\vec{F_2}$، $\vec{P}$) بالنسبة لـ**(Δ)**.
2. أحسب مجموع عزوم القوى المؤثّرة على القضيب.
3. عيّن منحى دوران القضيب.

## التمرين 8 : صفيحة خاضعة لأربع قوى

صفيحة متجانسة مستطيلة ABCD ($AB = 2AD = 80\ cm$) تدور بحرّية حول محور أفقي **(Δ)** عمودي على مستويها يمرّ بمركزها **O**، وهي في وضع شاقولي. تُطبَّق عليها في النقاط **A** و**B** و**D** و**H** ($CH = 20\ cm$) القوى $\vec{F_1}$ و$\vec{F_2}$ و$\vec{F_3}$ و$\vec{F_4}$ المبيّنة في الشكل : $\vec{F_1}$ و$\vec{F_2}$ شاقوليتان نحو الأعلى، $\vec{F_4}$ شاقولية نحو الأسفل، و$\vec{F_3}$ أفقية نحو اليسار ($F_2 \perp F_3$). $F_1 = 4\ N$ ؛ $F_2 = 3\ N$ ؛ $F_3 = 5\ N$ ؛ $F_4 = 3\ N$. المنحى الموجب : عكس دوران عقارب الساعة.

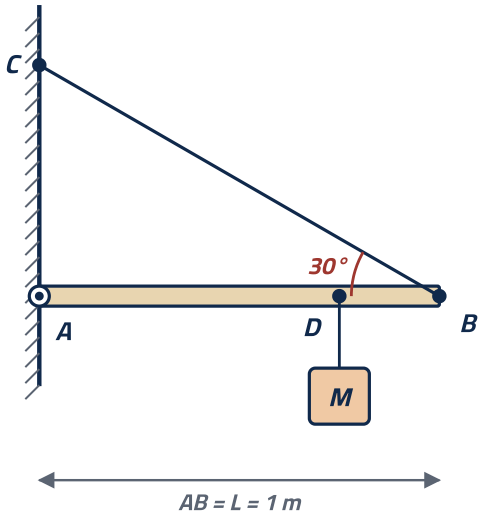



1. أحسب عزم كلّ قوة بالنسبة لـ**(Δ)**.
2. في أيّ جهة تدور الصفيحة ؟
3. نطبّق في النقطة **C** قوة $\vec{F_5}$ **شاقولية** لتتوازن الصفيحة. أحسب شدّتها وحدّد جهتها.

## المستوى 2 تمارين تثبيت التوازن، عمل المزدوجة، نظرية الطاقة الحركية

## التمرين 9 : ساق مثبّتة بخيط

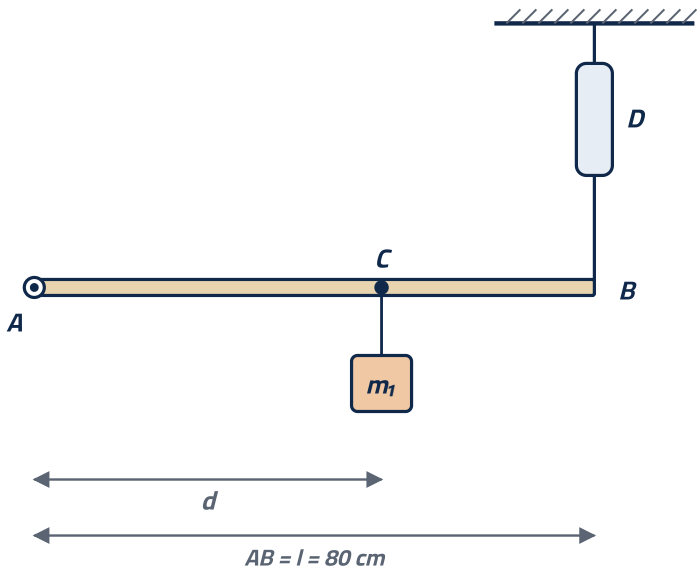
ساق متجانسة AB طولها $L = 1\ m$ وكتلتها $m = 2\ kg$، قابلة للدوران حول محور أفقي ثابت **(Δ)** يمرّ بالنقطة **A**. تُحفظ في وضع أفقي بواسطة خيط BC مثبّت في حائط شاقولي (في جهة **A**) عند **C**، يصنع مع الساق الزاوية $\alpha = 30°$. نعلّق في النقطة **D** من الساق، حيث $AD = 0{,}75\ m$، جسما كتلته $M = 1\ kg$. نأخذ $g = 10\ N/kg$.




1. مثّل على الشكل القوى المؤثّرة على الساق.
2. أكتب شرط توازن الساق (مجموع عزوم القوى بالنسبة لـ**(Δ)** معدوم).
3. استنتج شدّة توتّر الخيط **T**.
4. أوجد مركبتي ردّ فعل المحور $\vec{R}$ على الساق (الأفقية $R_x$ والشاقولية $R_y$)، ثمّ أحسب شدّته **R**.
5. يتحمّل الخيط توتّرا أقصاه $T_{max} = 60\ N$. ما أكبر كتلة $M_{max}$ يمكن تعليقها في **D** دون أن ينقطع الخيط ؟

## التمرين 10 : مسطرة وربيعة

مسطرة متجانسة **AB** كتلتها $m = 200\ g$ وطولها $l = 80\ cm$، يمكنها الدوران حول محور أفقي ثابت **(Δ)** يمرّ بطرفها **A**. الطرف **B** مشدود بواسطة ربيعة **D** معلّقة في الأعلى. لجعل المسطرة متوازنة أفقيا نعلّق بخيط في نقطة **C** تبعد عن **A** بالمسافة **d** كتلة $m_1 = 160\ g$. نأخذ $g = 10\ N/kg$.



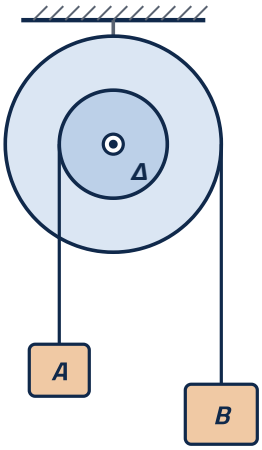
1. مثّل القوى المؤثّرة على المسطرة في حالة التوازن.

2. أذكر شرطي توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت.

3. الربيعة تشير عند التوازن إلى القيمة **2 N**. أحسب المسافة **d**.

4. أحسب شدّة ردّ فعل المحور **R**.

## التمرين 11 : أسطوانتان ملتحمتان




تتكوّن جملة ميكانيكية من أسطوانتين خفيفتين $C_1$ و$C_2$ ملتحمتين لهما نفس محور الدوران **(Δ)**، نصفا قطريهما $r_1 = 10\ cm$ و $r_2 = 20\ cm$. نلفّ حبلا خفيفا على كلّ أسطوانة، وينتهي الحبلان بجسمين **A** و**B** كتلتاهما $m_1$ و$m_2$ كما في الشكل. الجملة في حالة توازن. نأخذ $g = 10\ N/kg$.

1. مثّل القوى المؤثّرة على الجسمين **A** و**B**، وعلى جملة الأسطوانتين.

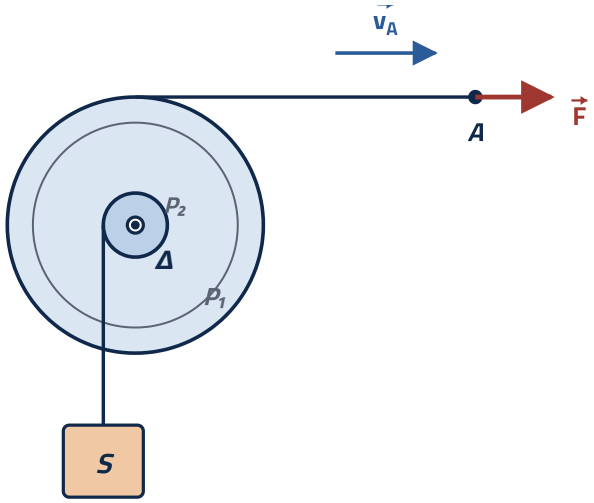
2. طبّق شرطي التوازن على الجسمين وعلى الأسطوانتين، واستنتج العلاقة بين $m_1$ و$m_2$ و$r_1$ و$r_2$. أحسب $m_2$ علما أنّ $m_1 = 600\ g$.

3. أحسب شدّة ردّ فعل المحور على الجملة.

4. نُعطي الجملة دفعة خفيفة نحو الأسفل من جهة **A** فتدور بسرعة زاوية $\omega = 2\ rad/s$، مع إهمال الاحتكاك. أ) حدّد طبيعة حركة كلّ من **A** و**B** والأسطوانتين. ب) أحسب سرعة كلّ من الجسمين **A** و**B**.

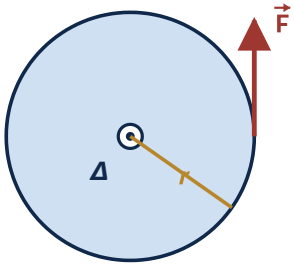
## التمرين 12 : بكرتان وجسم ثقيل

بكرتان ملتحمتان، الأولى $P_1$ نصف قطرها $r_1 = 40\ cm$ والثانية $P_2$ نصف قطرها $r_2 = 10\ cm$، لهما نفس المحور **(Δ)**. يُلفّ على كلّ منهما حبل مهمل الكتلة غير ممتدّ. يشدّ حبل $P_2$ جسما صلبا **S** ثقله $P = 8000\ N$، ونؤثّر على الطرف **A** للحبل الملفوف على $P_1$ بقوة $\vec{F}$ شدّتها ثابتة تجعل الطرف **A** يتحرّك بسرعة ثابتة $v_A = 0{,}4\ m/s$ وفق خطّ مستقيم أفقي (الشكل). نهمل ثقل البكرتين.




1. مثّل مختلف القوى المؤثّرة في جملة البكرتين.
2. أحسب شدّة القوة $\vec{F}$.
3. أحسب السرعة الزاوية للجملة $(P_1, P_2)$.
4. أحسب $v_S$ سرعة الجسم S، وقارن بين $v_A$ و$v_S$.
5. قارن بين المسافة التي يقطعها الطرف A وتلك التي يقطعها الجسم S خلال نفس المدّة $\Delta t$.
6. قارن بين استطاعة القوة $\vec{F}$ واستطاعة ثقل الجسم S. ماذا تستنتج ؟

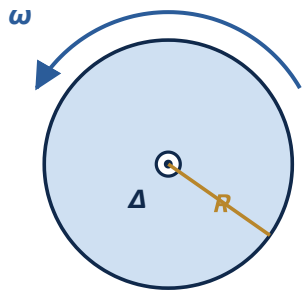
## التمرين 13 : عجلة تحت تأثير قوة مماسية




عجلة عزم عطالتها $J_\Delta = 0{,}5\ kg{\cdot}m^2$ ونصف قطرها $r = 0{,}2\ m$، قابلة للدوران حول محور ثابت $(\Delta)$ عمودي عليها ويمرّ بمركزها. تنطلق من السكون تحت تأثير قوة ثابتة $\vec{F}$ مماسية لمحيطها شدّتها $F = 20\ N$، فتنجز 10 دورات. نهمل الاحتكاكات.

1. أحسب عزم القوة $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ بالنسبة للمحور $(\Delta)$.
2. أحسب الزاوية $\Delta\theta$ التي مسحتها العجلة بالراديان.
3. أحسب عمل القوة $\vec{F}$ خلال هذه الحركة، علما أنّ $W(F) = \mathcal{M}_\Delta(F) \cdot \Delta\theta$.
4. بتطبيق نظرية الطاقة الحركية، استنتج السرعة الزاوية النهائية $\omega_f$ للعجلة.

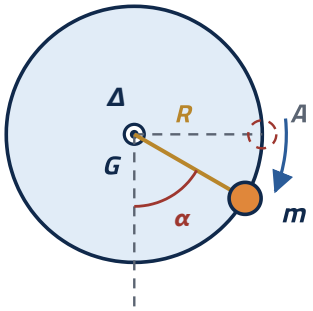
## التمرين 14 : توقّف أسطوانة




يُدير محرّك أسطوانة عزم عطالتها $J_\Delta = 0{,}8\ kg{\cdot}m^2$ حول محور ثابت **(Δ)** فتبلغ سرعتها الزاوية $\omega_0 = 50\ rad/s$. نفصل المحرّك عند لحظة نعتبرها مبدأ للأزمنة، فتتوقّف الأسطوانة بعد أن تنجز **20** دورة، بسبب عزم احتكاك ثابت $\mathcal{M}_f$. الحركة بعد الفصل متباطئة بانتظام.

1. أحسب الطاقة الحركية الدورانية للأسطوانة لحظة فصل المحرّك.
2. بتطبيق نظرية الطاقة الحركية، أوجد شدّة عزم الاحتكاك $\mathcal{M}_f$.
3. أحسب مدّة التوقّف $\Delta t$ (يمكن استعمال السرعة الزاوية المتوسّطة $\omega_0/2$).
4. أحسب الاستطاعة المتوسّطة التي يبدّدها الاحتكاك خلال التوقّف.

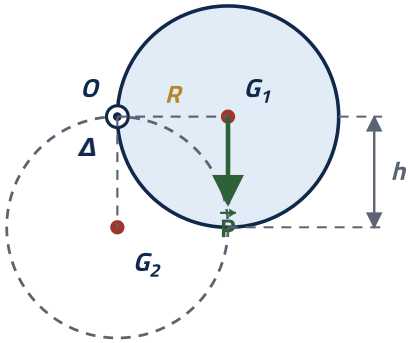
## التمرين 15 : قرص وكتلة نقطية




قرص متجانس كتلته $M = 400\ g$ نصف قطره $R = 12\ cm$ بإمكانه الدوران بحرّية (دون احتكاك) في مستوٍ شاقولي حول محور أفقي **(Δ)** يمرّ بمركز عطالته **G**. نثبّت عند نقطة **A** من محيطه كتلة نقطية $m = 100\ g$. نُزيح الجملة عن وضع توازنها حتى تصبح **G** و **A** على خطّ أفقي واحد، ونتركها دون سرعة ابتدائية. نأخذ $g = 10\ N/kg$.

1. أحسب عزم عطالة الجملة (قرص + كتلة نقطية) حول **(Δ)**.
2. أوجد عبارة الطاقة الحركية للجملة عندما يصنع **GA** الزاوية **α** مع الشاقول.
3. أ) أحسب الطاقة الحركية للجملة من أجل $\alpha = 60°$. ب) أحسب السرعة الزاوية. جـ) أحسب السرعة الخطية للكتلة النقطية.
4. أ) أحسب الطاقة الحركية للجملة عندما تمرّ الكتلة النقطية بوضع التوازن **(α = 0)**. ب) أحسب السرعة الزاوية. جـ) أحسب السرعة الخطية للكتلة النقطية.

## التمرين 16 : قرص يدور حول نقطة من حافته

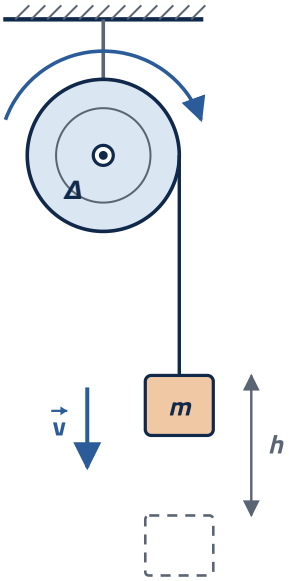



قرص متجانس كتلته $m = 0{,}5\ kg$ ونصف قطره $R = 0{,}1\ m$، قابل للدوران حول محور أفقي ثابت **(Δ)** عمودي عليه يمرّ بالنقطة **O** من حافته. عزم عطالته بالنسبة لمحور يمرّ بمركزه **G** هو $J_{\Delta_G} = \frac{1}{2} m R^2$. يُترك القرص دون سرعة ابتدائية والمستقيم **(OG)** أفقي (الوضع $G_1$). نهمل الاحتكاكات ونأخذ $g = 10\ N/kg$.

1. بتطبيق مبرهنة هويغنز، بيّن أنّ $J_\Delta = (3/2)\, m R^2$ ثمّ أحسب قيمته.
2. أحسب عمل ثقل القرص عندما ينتقل مركز عطالته من الوضع $G_1$ إلى أدنى وضع $G_2$ (شاقوليا تحت **O**).
3. بتطبيق نظرية الطاقة الحركية، أوجد عبارة السرعة الزاوية $\omega$ للقرص في الوضع $G_2$ ثمّ احسب قيمتها.
4. استنتج السرعة الخطية $v_G$ لمركز العطالة **G** في هذا الوضع.

**المستوى 3** **تمارين تعمّق** جمل مركّبة، بيانات، حركة انسحابية ودورانية معا، مسألة شاملة

## التمرين 17 : بكرة وجسم معلّق




بكرة عزم عطالتها $J_\Delta = 2\times10^{-2}\ kg{\cdot}m^2$ ونصف قطرها $r = 0{,}1\ m$، قابلة للدوران حول محور أفقي ثابت **(Δ)** يمرّ بمركزها. يلتفّ على محيطها خيط غير ممتدّ وكتلته مهملة، يحمل في طرفه الحرّ جسما صلبا كتلته $m = 1\ kg$ يُترك دون سرعة ابتدائية. نهمل الاحتكاكات ونأخذ $g = 10\ N/kg$.

1. أكتب عبارة الطاقة الحركية للجملة (بكرة + جسم) بدلالة $v$ و$m$ و$J_\Delta$ و$r$، علما أنّ الخيط لا ينزلق على البكرة.

2. بتطبيق نظرية الطاقة الحركية على الجملة، بيّن أنّ سرعة الجسم بعد نزوله المسافة **h** تُعطى بالعبارة : $v = \sqrt{2\,m\,g\,h / (m + J_\Delta / r^2)}$.

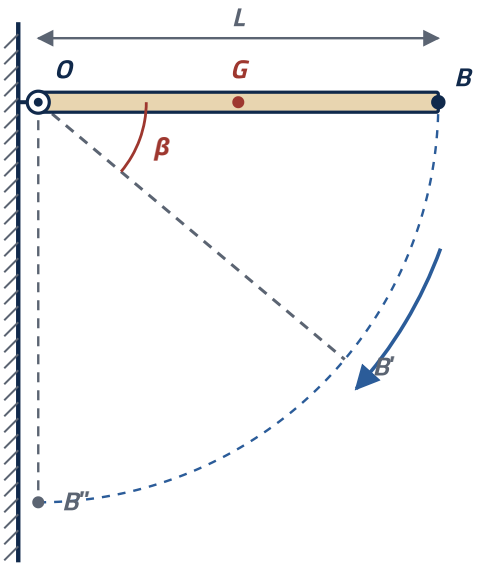
3. أحسب قيمة **v** من أجل **h = 2 m**.

4. استنتج السرعة الزاوية **ω** للبكرة عندئذ.

5. قارن **v** بسرعة جسم يسقط سقوطا حرّا من نفس الارتفاع. فسّر الفرق.

## التمرين 18 : ساق تُترك من الوضع الأفقي

ساق متجانسة **OB** طولها **L = 0,6 m** وكتلتها **m = 0,3 kg**، قابلة للدوران حول محور أفقي ثابت **(Δ)** يمرّ بطرفها **O**. عزم عطالتها بالنسبة لمحور يمرّ بمركزها **G** هو $J_{\Delta_G} = (1/12)\,m\,L^2$. تُترك الساق دون سرعة ابتدائية من الوضع الأفقي. نهمل الاحتكاكات ونأخذ **g = 10 N/kg**.




1. أحسب عزم عطالة الساق بالنسبة لـ**(Δ)**.

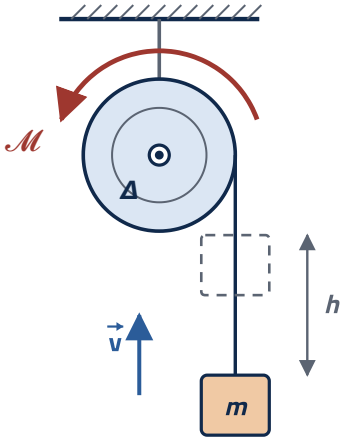
2. أوجد عبارة عمل ثقل الساق عندما تصنع الساق الزاوية **β** مع الأفق (أسفله).

3. بتطبيق نظرية الطاقة الحركية، بيّن أنّ السرعة الزاوية تُعطى بالعبارة $\omega = \sqrt{3\,g \sin\beta / L}$. هل تتعلّق بالكتلة **m** ؟

4. أحسب **ω** من أجل **β = 40°**.

5. أحسب السرعة الزاوية والسرعة الخطية للطرف **B** عندما تصبح الساق شاقولية.

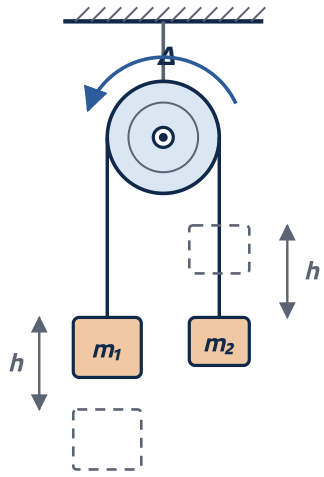
## التمرين 19 : مِرفاع




يرفع محرّك حمولة كتلتها $m = 10\ kg$ بواسطة حبل غير ممتدّ ملفوف على أسطوانة (مِرفاع) نصف قطرها $r = 0,2\ m$ وعزم عطالتها $J_\Delta = 0,5\ kg{\cdot}m^2$. يطبّق المحرّك على الأسطوانة عزما ثابتا $\mathcal{M} = 25\ N{\cdot}m$. تنطلق الجملة من السكون وتصعد الحمولة ارتفاعا $h = 2\ m$. نهمل الاحتكاكات ونأخذ $g = 10\ N/kg$.

1. أحسب الزاوية $\Delta\theta$ التي تمسحها الأسطوانة خلال هذا الصعود.
2. أحسب عمل عزم المحرّك وعمل ثقل الحمولة.
3. بتطبيق نظرية الطاقة الحركية على الجملة (أسطوانة + حمولة)، أحسب سرعة الحمولة $v$ والسرعة الزاوية $\omega$ في نهاية الصعود.
4. أحسب استطاعة المحرّك عند هذه اللحظة.

## التمرين 20 : بكرة وجسمان




تمرّ على بكرة عزم عطالتها $J_\Delta = 2,5\times10^{-3}\ kg{\cdot}m^2$ ونصف قطرها $r = 5\ cm$ خيط لا ينزلق ولا يمتدّ، يحمل في طرفيه الجسمين $S_1$ و$S_2$ كتلتاهما $m_1 = 300\ g$ و$m_2 = 200\ g$. تُترك الجملة دون سرعة ابتدائية، فينزل $S_1$ ارتفاعا $h = 0,75\ m$. نهمل الاحتكاكات ونأخذ $g = 10\ N/kg$.

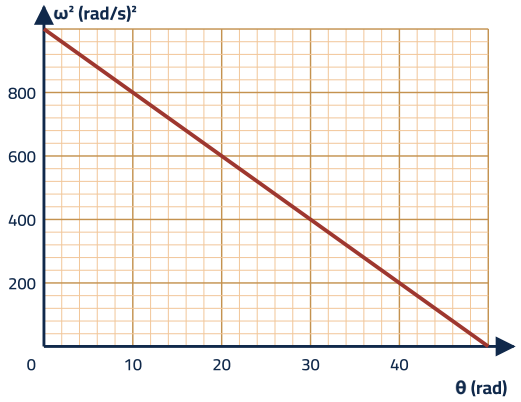
1. أكتب عبارة الطاقة الحركية للجملة (بكرة + جسمان) بدلالة سرعة الجسمين $v$.
2. أحسب مجموع أعمال القوى الخارجية المؤثّرة على الجملة خلال الانتقال $h$.
3. أوجد $v$ ثمّ السرعة الزاوية $\omega$ للبكرة.

4. الحركة متغيّرة بانتظام : أحسب تسارع الجسمين ومدّة الانتقال.

5. أحسب **v** لو أهملنا عزم عطالة البكرة. قارن.

## التمرين 21 : دولاب يتوقّف

يدور دولاب عزم عطالته $J_\Delta = 0{,}1\ kg{\cdot}m^2$ حول محور ثابت. عند لحظة نعتبرها المبدأ نفصل عنه المحرّك، فيتباطأ ويتوقّف بفعل عزم احتكاك ثابت $\mathcal{M}_f$. يمثّل البيان تغيّرات مربّع السرعة الزاوية $\omega^2$ بدلالة الفاصلة الزاوية $\theta$ الممسوحة بعد الفصل.




1. بالاعتماد على البيان، حدّد السرعة الزاوية $\omega_0$ عند الفصل والزاوية الكلّية الممسوحة حتى التوقّف.

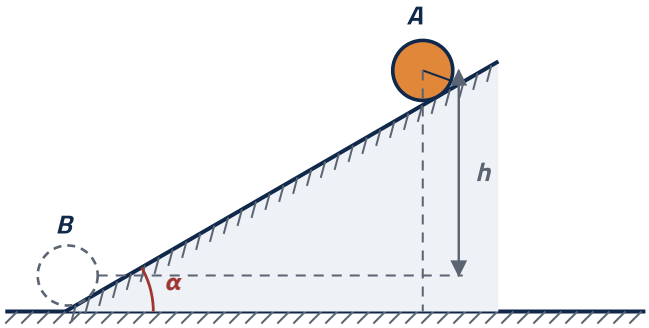
2. بتطبيق نظرية الطاقة الحركية، بيّن أنّ $\omega^2 = \omega_0^2 - (2\mathcal{M}_f / J_\Delta) \cdot \theta$.

3. استنتج من البيان قيمة عزم الاحتكاك $\mathcal{M}_f$.

4. أحسب عدد الدورات التي ينجزها الدولاب قبل أن يتوقّف، والطاقة الحركية الابتدائية.

## التمرين 22 : كرة على مستوٍ مائل

كرة مصمتة متجانسة كتلتها $m = 0{,}2\ kg$ ونصف قطرها $R = 2\ cm$، عزم عطالتها بالنسبة لأحد أقطارها $J = (2/5)\ m\ R^2$. تُترك دون سرعة ابتدائية من الموضع **A** الواقع على ارتفاع $h = 0{,}7\ m$ فوق **B** على مستوٍ مائل، فتتدحرج دون انزلاق ممّا يعني $v = R{\cdot}\omega$ (**v** سرعة مركزها). نأخذ $g = 10\ N/kg$.




1. بيّن أنّ الطاقة الحركية للكرة (انسحاب + دوران) تُكتب $E_c = (7/10)\ m\ v^2$.

2. حدّد القوى المؤثّرة على الكرة وأعمالها (قوة الاحتكاك السكوني عملها معدوم لأنّ نقطة التماس لا تنزلق).

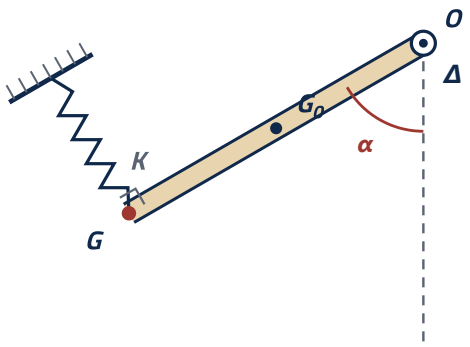
3. أوجد عبارة سرعة الكرة عند **B** ثمّ أحسبها، والسرعة الزاوية **ω**.

4. قارن مع سرعة كتلة تنزلق دون احتكاك من نفس الارتفاع. ما حصّة الدوران من الطاقة الحركية الكلّية ؟

## التمرين 23 : مسألة شاملة : ساق، نابض وكرة

ساق متجانسة **OG** كتلتها **M = 2 kg** وطولها **L = 40 cm**، قابلة للدوران دون احتكاك حول محور أفقي ثابت **(Δ)** يمرّ بطرفها **O**. نعطي : **g = 10 N/kg** ؛ عزم عطالة الساق بالنسبة لمحور يمرّ بمركز عطالتها $G_0$ هو $J_{\Delta_{G0}} = (1/12)\, M\, L^2$. الأجزاء الثلاثة مستقلّة.

**الجزء الأول :** نربط الطرف **G** للساق بنابض ثابت مرونته **K** حامله عمودي على الساق، فيستطيل النابض بمقدار **x** وتتوازن الساق عندما تصنع الزاوية **α = 60°** مع الشاقول المارّ بـ**O** (الشكل 1).




الشكل 1

1. بتطبيق شرط التوازن الدوراني على الساق، أوجد شدّة توتّر النابض **F**.

2. علما أنّ الطاقة المخزّنة في النابض $E_{pe} = \frac{1}{2} K x^2 = 0{,}05\ J$ وأنّ **F = K·x**، استنتج ثابت المرونة **K** ومقدار الاستطالة **x** .

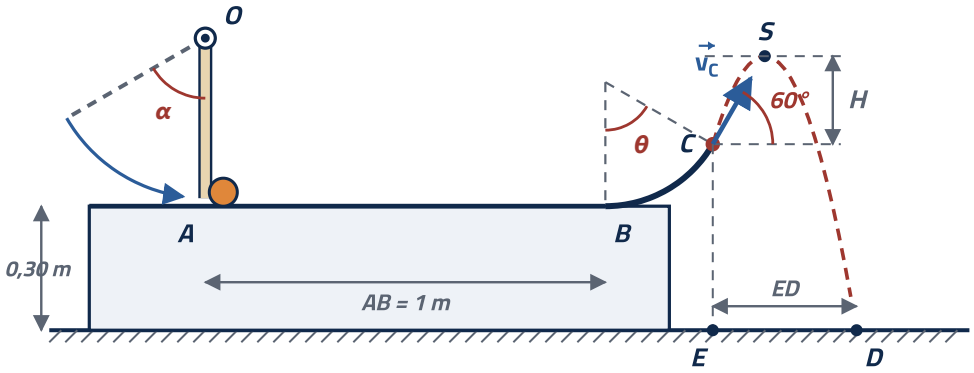
**الجزء الثاني :** ينفلت الساق من النابض فتُترك دون سرعة ابتدائية من نفس الوضع **(α = 60°)** وتدور حول **(Δ)**.

1. باستعمال مبرهنة هويغنز وبتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة على الساق، بيّن أنّ سرعتها الزاوية عند مرورها بالوضع الشاقولي تُعطى بالعبارة : $\omega = \sqrt{3\, g\, (1 - \cos\alpha) / L}$.

2. أحسب **ω**، ثمّ السرعة الخطية للنقطة **G** (حافة الساق) عند مرورها بالنقطة **A**.

**الجزء الثالث :** عند مرور الساق بالوضع الشاقولي يصطدم طرفها **G** بكرة نقطية كتلتها **m = 200 g** موضوعة في **A** على مستوٍ أفقي خشن **AB** طوله **1 m** يرتفع **0,30 m** عن الأرض، فتنطلق الكرة بسرعة $v_A$ تساوي سرعة **G** التي وجدتها في الجزء

الثاني. تصل الكرة إلى **B** بسرعة $v_B = 2\ m/s$، ثمّ تتابع حركتها على منحدر دائري أملس **BC** نصف قطره $r = 30\ cm$، وتغادره في **C** بسرعة $v_C = 1\ m/s$ يصنع حاملها مع الأفق الزاوية $60°$، ثمّ تتحرّك في الهواء وتسقط على الأرض في **D** (الشكل 2 غير مرسوم بسلّم). **E** هي المسقط الشاقولي لـ**C** على الأرض.

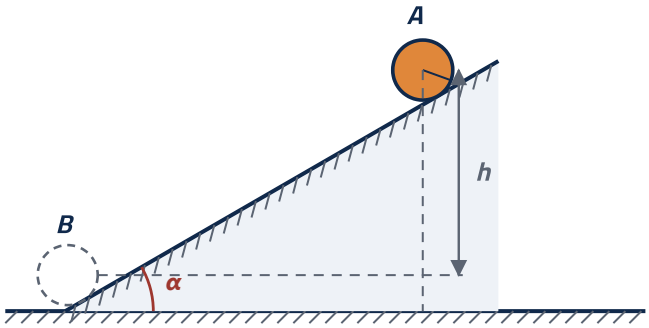



الشكل 2

1. أحسب شدّة قوة الاحتكاك **f** (المعتبرة ثابتة) على المستوي **AB**.
2. أنجز الحصيلة الطاقوية للكرة بين **B** و**C**، وأحسب الزاوية **θ** التي يصنعها نصف القطر عند **C** مع الشاقول.
3. أحسب سرعة الكرة عند الذروة **S**، ثمّ استنتج ارتفاع الذروة **H** بالنسبة لـ**C** (بتطبيق نظرية الطاقة الحركية بين **C** و**S**).
4. مدّة الحركة بين **C** و**D** هي **0,4 s**. أحسب المدى الأفقي **ED**.

## التمرين 24 : كرة تصعد مستوٍ مائل متدحرجة

كرة مصمتة متجانسة كتلتها $m = 0,5\ kg$ ونصف قطرها $R = 5\ cm$، عزم عطالتها بالنسبة لأحد أقطارها $J = (2/5)\ m\ R^2$. تنطلق من أسفل مستوٍ مائل يصنع مع الأفق الزاوية $\alpha = 30°$ في النقطة **B** نحو الأعلى بسرعة $v_0 = 3\ m/s$، وتتدحرج دون انزلاق ($v = R \cdot \omega$) حتى تتوقّف لحظيا في النقطة **A** الواقعة على ارتفاع **h** بالنسبة لـ**B**. نأخذ $g = 10\ N/kg$.




1. أحسب السرعة الزاوية الابتدائية $\omega_0$ والطاقة الحركية الابتدائية للكرة (انسحاب + دوران). ما حصّة الدوران منها ؟
2. أنجز الحصيلة الطاقوية للكرة بين **B** و**A**. لماذا لا تنجز قوة الاحتكاك السكوني أيّ عمل ؟
3. أوجد المسافة $d = BA$ التي تقطعها الكرة على المستوي، ثمّ الارتفاع **h**.
4. نعيد التجربة بقشرة كروية رقيقة (كرة مجوّفة) لها نفس الكتلة ونفس نصف القطر وعزم عطالتها $J' = (2/3)\, m\, R^2$، وبنفس السرعة $v_0$. أحسب المسافة $d'$ التي تقطعها قبل أن تتوقّف. ماذا تلاحظ ؟
5. أحسب المسافة $d''$ التي يقطعها جسم صلب ينزلق دون احتكاك على نفس المستوي بنفس السرعة $v_0$، وقارن بين المسافات الثلاث.

الجزء الرابع

# الحلول المفصّلة

كلّ حلّ مسبوق بتوجيه منهجي، مع التنبيه إلى الأخطاء الشائعة

## المستوى 1 تمارين تطبيقية مباشرة

### حلّ التمرين 1

**توجيه منهجي**

حوّل التواتر إلى سرعة زاوية $\omega = 2\pi n/60$. كلّ نقاط اللعبة لها نفس $\omega$، وتختلف سرعاتها الخطية $v = R\cdot\omega$ باختلاف البعد عن المحور. وتربط $S = R\cdot\theta$ المسافة بالزاوية.

1. $$\omega = 2\pi\, n / 60 = 2\pi \times 15 / 60 = \pi/2 \approx 1{,}57 \text{ rad/s}$$

2. $$v_A = R_A \cdot \omega = 6 \times 1{,}57 \approx 9{,}42 \text{ m/s}$$

$$v_B = R_B \cdot \omega = 2 \times 1{,}57 \approx 3{,}14 \text{ m/s}$$

3. الحصانان يمسحان نفس الزاوية $\theta$ : $S_A = R_A\cdot\theta$ و$S_B = R_B\cdot\theta$، ومنه $S_B / S_A = R_B / R_A$ :

$$S_B = S_A \times R_B / R_A = 12 \times 2 / 6 = 4 \text{ m}$$

4. $$\theta = S_A / R_A = 12 / 6 = 2 \text{ rad} \approx 115°$$

عدد الدورات : $N = \theta / 2\pi = 2 / 6{,}28 \approx 0{,}32$ دورة. مدّة الحركة : $\Delta t = \theta / \omega = 2 / 1{,}57 \approx 1{,}27 \text{ s}$.

**انتبه : خطأ شائع**

$\theta = 2$ rad ليست $2°$ : تحويل الراديان إلى الدرجات بالضرب في $180/\pi$.

## حلّ التمرين 2

**توجيه منهجي**

اكتب العلاقة بالرموز أوّلا، ثمّ حوّل كلّ المعطيات إلى وحدات النظام الدولي (**kg, m, rad/s**) قبل التعويض.

1. $$J_\Delta = \tfrac{1}{2}\, m\, R^2 = \tfrac{1}{2} \times 2 \times 0{,}2^2 = 0{,}04\ \text{kg·m}^2$$

2. في دورة واحدة تمسح الزاوية **2π** في المدّة **T**، والتواتر بـ **tr/min** هو عدد الدورات في **60 s** :

$$\omega = 2\pi \times n / 60$$

$$\omega = 2\pi \times 300 / 60 = 10\pi \approx 31{,}4\ \text{rad/s}$$

3. $$E_c = \tfrac{1}{2}\, J_\Delta\, \omega^2 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}04 \times 31{,}4^2 \approx 19{,}7\ \text{J}$$

## حلّ التمرين 3

**توجيه منهجي**

عزم قوة = **F × d** حيث **d** هو **البعد العمودي** بين المحور وحامل القوة، وليس المسافة إلى نقطة التطبيق. عندما تميل القوة بالزاوية **α** عن مستوي الباب يصبح **d = OH · sin α**.

1. **F** عمودية : ⇒ **d = 0,8 m**

$$\mathcal{M}_\Delta(F) = F \cdot d = 20 \times 0{,}8 = 16\ \text{N·m}$$

2. $$\mathcal{M}_\Delta(F) = F \cdot d \cdot \sin 60° = 20 \times 0{,}8 \times 0{,}866 \approx 13{,}9\ \text{N·m}$$

3. العزم أعظمي عندما **sin α = 1** أي **α = 90°** : القوة **عمودية** على الباب، فيكون ذراع القوة أكبر ما يمكن **(d = OH)**.

4. القوة عمودية $\Rightarrow \mathcal{M} = F \cdot d'$ :

$$d' = \mathcal{M} / F = 13{,}9 / 20 \approx 0{,}69\ \text{m}$$

$d' = d \cdot \sin 60°$ ✓ (أي $0{,}69\ \text{m} < 0{,}9\ \text{m}$ : النقطة موجودة على الباب).

## حلّ التمرين 4

### توجيه منهجي

عمل المزدوجة $W = \mathcal{M} \cdot \Delta\theta$ (بالراديان)، واستطاعتها $P = \mathcal{M} \cdot \omega$. وعزم المزدوجة $\mathcal{M} = F \cdot d$ حيث $d$ المسافة بين حاملي القوتين، أي **القطر** $2r$ للقوتين المماسيتين.

1. $$\Delta\theta = 2\pi \times 120 = 240\pi \approx 754\ \text{rad}$$

$$W = \mathcal{M} \cdot \Delta\theta = 150 \times 754 \approx 1{,}13 \times 10^{5}\ \text{J}$$

2. $$\omega = 2\pi \times 180 / 60 = 6\pi \approx 18{,}8\ \text{rad/s}$$

$$P = \mathcal{M} \cdot \omega = 150 \times 18{,}8 \approx 2{,}83 \times 10^{3}\ \text{W}$$

تحقّق : المدّة $\Delta t = 120 / 3 = 40\ \text{s}$ و $W / \Delta t = 1{,}13 \times 10^{5} / 40 \approx 2{,}83 \times 10^{3}\ \text{W}$ ✓.

3. $$\mathcal{M} = F \cdot d = F \cdot 2r \Rightarrow F = \mathcal{M} / 2r = 150 / (2 \times 0{,}2) = 375\ \text{N}$$

## حلّ التمرين 5

### توجيه منهجي

ابحث أوّلا عن عزم العطالة بالنسبة لمحور يمرّ بـ $G$، ثمّ طبّق هويغنز $J_{\Delta'} = J_{\Delta_G} + m\,d^2$ حيث $d$ المسافة بين المحورين المتوازيين. وعزم عطالة جملة هو **مجموع** عزوم عطالة أجزائها.

1. $$J_{\Delta_G} = (1/12)\, m\, L^2 = (1/12) \times 0{,}3 \times 0{,}6^2 = 9{,}0 \times 10^{-3}\ \text{kg·m}^2$$

2. **مبرهنة هويغنز :** عزم عطالة جسم صلب بالنسبة لمحور **(Δ)** لا يمرّ بمركز عطالته ويوازي المحور **$(\Delta_G)$** المارّ بمركز العطالة يساوي عزم عطالته بالنسبة لـ**$(\Delta_G)$** مضافا إليه جداء كتلته في مربّع المسافة **d** بين المحورين.

3. المحور **(Δ)** يمرّ بالطرف **A** فـ **$d = AG = L/2$** :

$$J_\Delta = J_{\Delta_G} + m\,(L/2)^2 = (1/12)\,m\,L^2 + (1/4)\,m\,L^2 = (1/3)\,m\,L^2$$

$$J_\Delta = (1/3) \times 0{,}3 \times 0{,}6^2 = 3{,}6\times10^{-2}\ \text{kg·m}^2$$

4. الكريّة النقطية على بعد **$AB = L = 0{,}6\ \text{m}$** من **(Δ)** : **$J' = m'\,L^2 = 0{,}1 \times 0{,}36 = 3{,}6\times10^{-2}\ \text{kg·m}^2$**.

$$J = J_\Delta + J' = 3{,}6\times10^{-2} + 3{,}6\times10^{-2} = 7{,}2\times10^{-2}\ \text{kg·m}^2$$

## حلّ التمرين 6

### توجيه منهجي

عزم عطالة الجملة = مجموع عزوم عطالة أجزائها بالنسبة لنفس المحور. **البكرة التي كتلتها موزّعة على محيطها** تُعامَل كحلقة : **$J = M\,R^2$**. أمّا الكتلتان النقطيتان فكلّ منهما على بعد **L/2** من المحور.

1. $$J_p = M\,R^2 = 0{,}1 \times 0{,}2^2 = 4\times10^{-3}\ \text{kg·m}^2$$

$$J_S = 2 \times m\,(L/2)^2 = 2 \times 0{,}05 \times 0{,}4^2 = 1{,}6\times10^{-2}\ \text{kg·m}^2$$

الساق مهملة الكتلة : عزم عطالتها معدوم.

$$J_\Delta = 4\times10^{-3} + 1{,}6\times10^{-2} = 2{,}0\times10^{-2}\ \text{kg·m}^2$$

2. مساهمة الكتلتين **$1{,}6\times10^{-2}$** أي **80 %** من الكلّ، ومساهمة البكرة **20 %** فقط، مع أنّ كتلة البكرة (**100 g**) تساوي كتلة الكتلتين معا : لأنّ العزم يتعلّق بمربّع **البعد عن المحور**، والكتلتان أبعد (**40 cm** مقابل **20 cm**).

## حلّ التمرين 7

**توجيه منهجي**

لكلّ قوة : (1) حدّد منحى دورانها حول المحور (لتعرف إشارة العزم)، (2) احسب ذراعها **d**، (3) **$\mathcal{M} = \pm F \cdot d$**. حامل الثقل شاقولي يمرّ بـ **G** : ذراعه **OG**. ثمّ اجمع جبريا.

1. المنحى الموجب : عكس دوران عقارب الساعة. $\vec{F_1}$ تدفع النقطة **A** (يسار **O**) نحو الأسفل : دوران في المنحى الموجب. ذراعها $d_1 = OA \cdot \sin\alpha = 0{,}3 \times 0{,}866 \approx 0{,}26\ m$ :

$$\mathcal{M}(F_1) = + F_1\, d_1 = + 2 \times 0{,}26 \approx + 0{,}52\ N{\cdot}m$$

$\vec{F_2}$ عمودية، تدفع **B** (يمين **O**) نحو الأعلى : دوران موجب، ذراعها $OB = 0{,}7\ m$ :

$$\mathcal{M}(F_2) = + F_2 \cdot OB = + 1{,}5 \times 0{,}7 = + 1{,}05\ N{\cdot}m$$

الثقل $\vec{P}$ في **G** (يمين **O**) نحو الأسفل : دوران سالب، ذراعه $OG = 0{,}2\ m$ :

$$\mathcal{M}(P) = - P \cdot OG = - 10 \times 0{,}2 = - 2{,}0\ N{\cdot}m$$

(ردّ فعل المحور يقطع المحور : عزمه معدوم.)

2. $$\Sigma\mathcal{M} = + 0{,}52 + 1{,}05 - 2{,}0 \approx - 0{,}43\ N{\cdot}m$$

3. المجموع سالب : يدور القضيب في المنحى السالب، أي **في اتجاه دوران عقارب الساعة**، ويغلب عزم الثقل.

**انتبه : خطأ شائع**

الذراع **d** هو البعد **العمودي** عن حامل القوة : لـ$\vec{F_1}$ ليس **OA** بل **$OA \cdot \sin\alpha$**.

## حلّ التمرين 8

**توجيه منهجي**

نعتبر المحور في المركز **O**. لكلّ قوة : الذراع = المسافة العمودية بين **O** وحامل القوة. القوى الشاقولية : ذراعها المسافة الأفقية لنقطة التطبيق (**40 cm** لـ **A** و**B**، **20 cm** لـ **H**). القوة الأفقية في **D** : ذراعها المسافة الشاقولية **20 cm**.

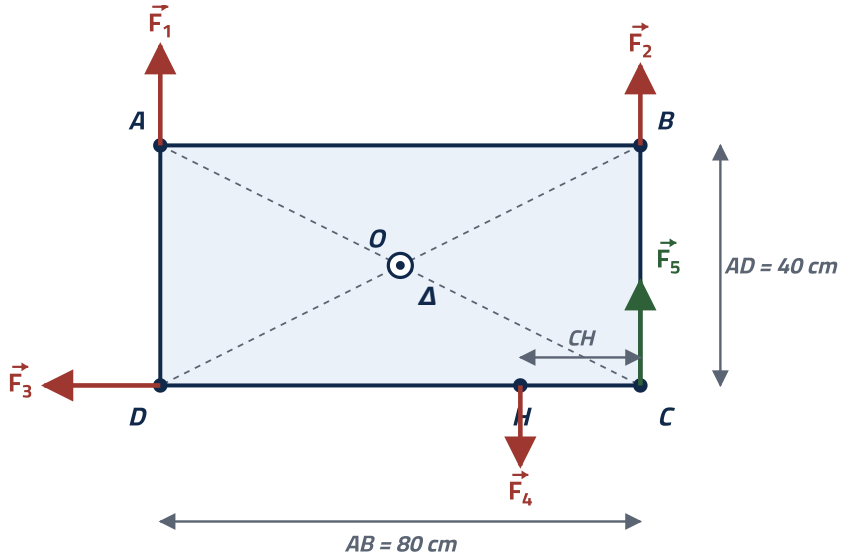
1. 
- $\vec{F_1}$ (في **A**، إلى أعلى) : تدير في عقارب الساعة : $\mathcal{M}_1 = -4 \times 0{,}4 = -1{,}6\ \text{N·m}$
- $\vec{F_2}$ (في **B**، إلى أعلى) : عكس عقارب الساعة : $\mathcal{M}_2 = +3 \times 0{,}4 = +1{,}2\ \text{N·m}$
- $\vec{F_3}$ (في **D**، أفقية نحو اليسار، تحت المحور) : في عقارب الساعة : $\mathcal{M}_3 = -5 \times 0{,}2 = -1{,}0\ \text{N·m}$
- $\vec{F_4}$ (في **H**، إلى أسفل، يمين **O**) : في عقارب الساعة : $\mathcal{M}_4 = -3 \times 0{,}2 = -0{,}6\ \text{N·m}$

2. $$\Sigma\mathcal{M} = -1{,}6 + 1{,}2 - 1{,}0 - 0{,}6 = -2{,}0\ \text{N·m}$$

المجموع سالب : تدور الصفيحة في **اتجاه دوران عقارب الساعة**.

3. لتتوازن الصفيحة يجب أن يكون $\Sigma\mathcal{M} = 0$، أي أن تؤدّي $\vec{F_5}$ عزما موجبا **+ 2,0 N·m** . **C** (يمين **O**) على بعد أفقي **0,4 m** من المحور : القوة الشاقولية **إلى أعلى** :

$$\mathcal{M}(F_5) = +F_5 \times 0{,}4 = +2{,}0 \Rightarrow F_5 = 5\ \text{N}$$



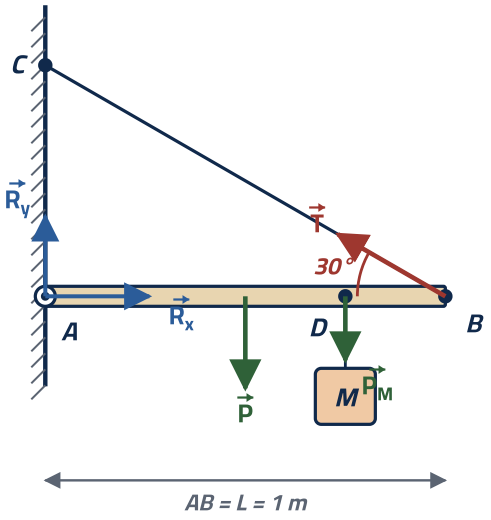

القوة $F_5$ (بالأخضر) تعاكس الدوران

## حلّ التمرين 9

**توجيه منهجي**

ساق قابلة للدوران حول **A** : اختر المحور المارّ بـ**A**، فيختفي ردّ الفعل $\vec{R}$ (المجهول) من معادلة العزوم، وتجد **T** مباشرة. بعدها اسقط $\Sigma F = 0$ على المحورين لتجد $R_x$ و$R_y$.

1. القوى : ثقل الساق $\vec{P}$ في **G** (منتصفها) ؛ قوة الخيط $\vec{P_M}$ على الساق في **D** (ثقل الجسم، شدّتها **M·g**) ؛ توتّر الخيط $\vec{T}$ في **B** (باتجاه **C**) ؛ ردّ فعل المحور $\vec{R}$ في **A**.




القوى المؤثّرة على الساق (ردّ فعل المحور بمركبتيه)

2. المنحى الموجب : منحى دوران الساق الذي يسبّبه $\vec{T}$ (عكس عقارب الساعة). ذراع $\vec{T}$ هو $AB \cdot \sin\alpha = L \sin\alpha$ :

$$\Sigma \mathcal{M}_{\Delta} = T \cdot L \cdot \sin\alpha - P \cdot (L/2) - M\,g \cdot AD = 0$$

3. $$T = (m\,g \cdot L/2 + M\,g \cdot AD) / (L \cdot \sin\alpha) = (2\times10\times0{,}5 + 1\times10\times0{,}75) / (1 \times 0{,}5) = 17{,}5 / 0{,}5 = 35\ \text{N}$$

4. الشرط الأول $\vec{\Sigma F} = \vec{0}$ بالإسقاط :

أفقيا :

$$R_x - T\cos\alpha = 0 \Rightarrow R_x = 35 \times 0{,}866 \approx 30{,}3\ N$$

شاقوليا :

$$R_y + T\sin\alpha - (m+M)\,g = 0 \Rightarrow R_y = 30 - 17{,}5 = 12{,}5\ N$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{30{,}3^2 + 12{,}5^2} \approx 32{,}8\ N$$

5. عند الحدّ الأقصى $T = T_{max} = 60\ N$ :

$$60 \times 1 \times 0{,}5 = 10 + M_{max} \times 10 \times 0{,}75 \Rightarrow M_{max} = 20 / 7{,}5 \approx 2{,}7\ kg$$

**انتبه : خطأ شائع**

$\Sigma \mathcal{M} = 0$ تُكتب بالنسبة للمحور المارّ بـ **A** : لا تُدخل $\vec{R}$ فيها، ولا تنسَ ثقل **الساق** نفسها في منتصفها.

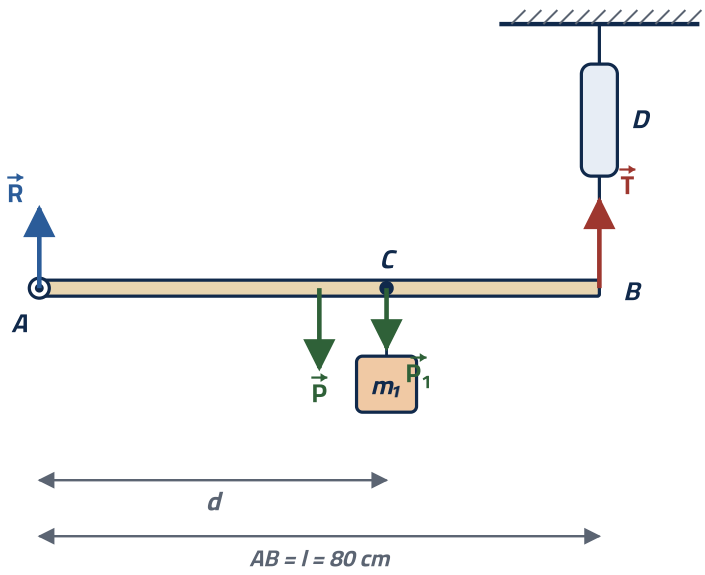
## حلّ التمرين 10

**توجيه منهجي**

حدّد المحور (المارّ بـ**A**) واكتب $\Sigma \mathcal{M} = 0$ : توتّر الربيعة (ما تشير إليه) عزمه موجب، والثقلان عزومهما سالبة.

حوّل الكتل إلى **kg**.

1. القوى : ثقل المسطرة $\vec{P}$ في منتصفها ، قوة الخيط $\vec{P_1}$ في C (ثقل $m_1$) ، توتّر الربيعة $\vec{T}$ في B ؛ ردّ فعل المحور $\vec{R}$ في A.




القوى المؤثّرة على المسطرة

2. الشرط الأول : المجموع الشعاعي للقوى معدوم. الشرط الثاني : مجموع عزوم القوى بالنسبة للمحور معدوم.

3. $P = m\,g = 0{,}2 \times 10 = 2\ N$ و $P_1 = m_1\,g = 0{,}16 \times 10 = 1{,}6\ N$ :

$$\Sigma \mathcal{M} = T \cdot l - P \cdot (l/2) - P_1 \cdot d = 0$$

$$d = (T\,l - P\,l/2) / P_1 = (2 \times 0{,}8 - 2 \times 0{,}4) / 1{,}6 = 0{,}8 / 1{,}6 = 0{,}5\ m$$

4. $$R + T = P + P_1 \Rightarrow R = 2 + 1{,}6 - 2 = 1{,}6\ N$$

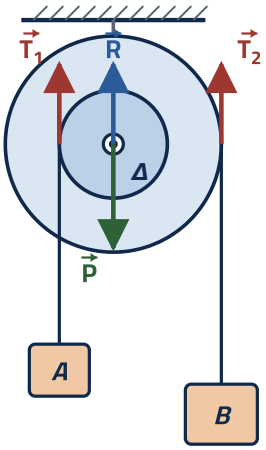
ردّ الفعل موجّه نحو الأعلى.

## حلّ التمرين 11

### توجيه منهجي

الحبلان شاقوليان : كلّ جسم في توازن تحت ثقله وتوتّر حبله ⇒ $T = m\,g$. أمّا الأسطوانتان فخاضعتان لتوتّري الحبلين (عزماهما متعاكسان) ولردّ الفعل. إذا كان $\Sigma \mathcal{M} = 0$ فالدوران (إن وُجد) منتظم.

1. الجسم **A** : ثقله $\vec{P_A}$ وتوتّر الحبل $\vec{T_1}'$. الجسم **B** : $\vec{P_B}$ و$\vec{T_2}'$. الأسطوانتان : توتّرا الحبلين $\vec{T_1}$ (على $C_1$) و$\vec{T_2}$ (على $C_2$)، ثقل الجملة مهمل (أسطوانتان خفيفتان)، وردّ فعل المحور $\vec{R}$.




القوى المؤثّرة على الجملة (الأسطوانتان)

2. الجسمان : $T_1 = m_1\,g$ و$T_2 = m_2\,g$. الأسطوانتان : عزما $\vec{T_1}$ و$\vec{T_2}$ متعاكسان :

$$\Sigma\mathcal{M} = T_2\,r_2 - T_1\,r_1 = 0 \Rightarrow m_2\,g\,r_2 = m_1\,g\,r_1 \Rightarrow m_2 = m_1\,r_1 / r_2$$

$$m_2 = 600 \times 10 / 20 = 300\ g$$

3. الشرط الأول على الأسطوانتين :

$$R = T_1 + T_2 = (m_1 + m_2)\,g = 0{,}9 \times 10 = 9\ N$$

4. أ) الدفعة تُكسب الجملة سرعة زاوية، ومجموع العزوم يبقى معدوما $\Rightarrow$ $\omega$ ثابتة : الأسطوانتان في **دوران منتظم**، و**A** و**B** في **حركة مستقيمة منتظمة** (انسحابية، شاقولية) : أحدهما ينزل والآخر يصعد.

ب)

$$v_A = \omega\,r_1 = 2 \times 0{,}1 = 0{,}2\ m/s$$

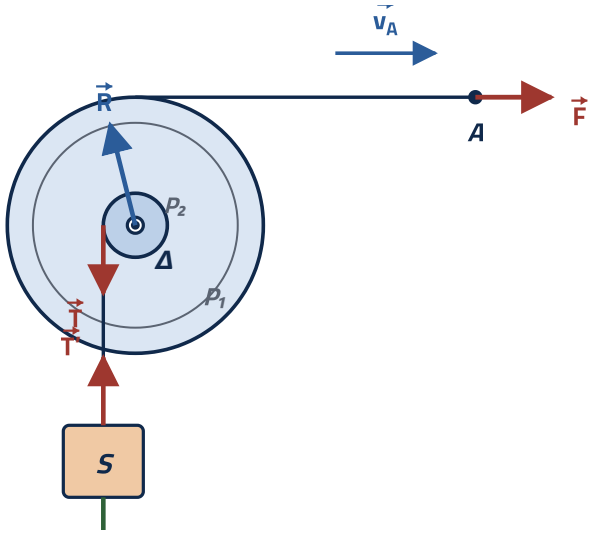
$$v_B = \omega\,r_2 = 2 \times 0{,}2 = 0{,}4\ m/s$$

## حلّ التمرين 12

**توجيه منهجي**

السرعة ثابتة ⇒ الجملة في توازن : $\Sigma \mathcal{M} = 0$. جسم S يتحرّك بسرعة ثابتة فتوتّر حبله يساوي ثقله. والخيط غير ممتدّ ولا ينزلق : $v = r \cdot \omega$ لكلّ بكرة.

1. القوى على جملة البكرتين : $\vec{F}$ (قوة الحبل على $P_1$، أفقية في الأعلى) ؛ $\vec{T}$ (توتّر حبل $P_2$، شاقولي نحو الأسفل) ؛ ردّ فعل المحور $\vec{R}$ (ثقل الجملة مهمل).




القوى المؤثّرة على الجملة (البكرتان) ثمّ على الجسم S

2. الجسم S في توازن : $T = P = 8000\ N$. للبكرتين :

$$\Sigma \mathcal{M} = T\,r_2 - F\,r_1 = 0 \Rightarrow F = P \cdot r_2 / r_1 = 8000 \times 0{,}1 / 0{,}4 = 2000\ N$$

(ردّ الفعل : $R = \sqrt{F^2 + P^2} \approx 8{,}2 \times 10^3\ N$).

3. $$\omega = v_A / r_1 = 0{,}4 / 0{,}4 = 1\ rad/s$$

4. $$v_S = \omega \cdot r_2 = 1 \times 0{,}1 = 0{,}1\ m/s$$

$v_S = v_A / 4$ : سرعة الجسم أصغر بأربع مرّات من سرعة الطرف A (لأنّ $r_2 = r_1 / 4$).

5. $d_A = r_1\,\Delta\theta$ و $d_S = r_2\,\Delta\theta$ ⇒ $d_A / d_S = r_1 / r_2 = 4$ : يقطع A مسافة تساوي أربعة أمثال مسافة S.

6. $$P_F = F \cdot v_A = 2000 \times 0{,}4 = 800\ W$$

$$P_P = P \cdot v_S = 8000 \times 0{,}1 = 800\ W$$

الاستطاعتان متساويتان : لا ضياع للطاقة. ما نربحه في القوة (أصغر بأربع مرّات) نخسره في المسافة (أكبر بأربع مرّات) : مبدأ الرافعة.

## حلّ التمرين 13

**توجيه منهجي**

الجملة : العجلة. القوى : $\vec{F}$ (عزمها غير معدوم)، الثقل وردّ فعل المحور (عزمهما معدوم، المحور يمرّ بمركز العطالة).

تنطلق من السكون : $E_{c1} = 0$.

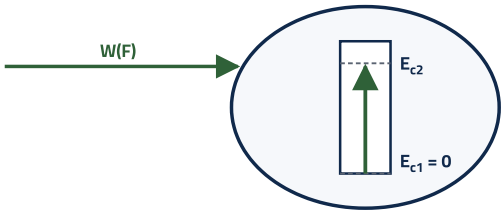
1. القوة مماسية ⇒ ذراعها $r$ :

$$\mathcal{M}_\Delta(F) = F \cdot r = 20 \times 0{,}2 = 4\ N{\cdot}m$$

2. $$\Delta\theta = 2\pi \times 10 = 20\pi \approx 62{,}8\ rad$$

3. $$W(F) = \mathcal{M} \cdot \Delta\theta = 4 \times 62{,}8 \approx 251\ J$$

4.



الجملة (عجلة)

$$E_{c1} + W(F) = E_{c2} \Rightarrow 0 + 251 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}5 \times \omega_f^2$$

$$\omega_f = \sqrt{2 \times 251 / 0{,}5} = \sqrt{1005} \approx 31{,}7\ rad/s$$

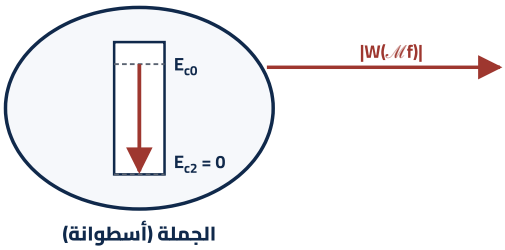
## حلّ التمرين 14

### توجيه منهجي

بعد فصل المحرّك لا يبقى إلاّ عزم الاحتكاك : عمله مقاوم $W = -\mathcal{M}_f \cdot \Delta\theta$. الأسطوانة تتوقّف : $E_{c2} = 0$.
الحركة متباطئة بانتظام ⇒ السرعة الزاوية المتوسّطة $\omega_0/2$.

1. $$E_{c0} = \tfrac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}8 \times 50^2 = 1000\ \text{J}$$

2. $\Delta\theta = 2\pi \times 20 = 40\pi \approx 126\ \text{rad}$.




$$E_{c0} - \mathcal{M}_f \cdot \Delta\theta = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_f = 1000 / 126 \approx 7{,}96\ \text{N·m}$$

3. $$\Delta t = \Delta\theta / \omega_{moy} = 126 / (50/2) = 126 / 25 \approx 5{,}0\ \text{s}$$

4. $$P_{moy} = |W| / \Delta t = 1000 / 5{,}03 \approx 199\ \text{W}$$

تحقّق : $\mathcal{M}_f \cdot \omega_{moy} = 7{,}96 \times 25 \approx 199\ \text{W}$ ✓.

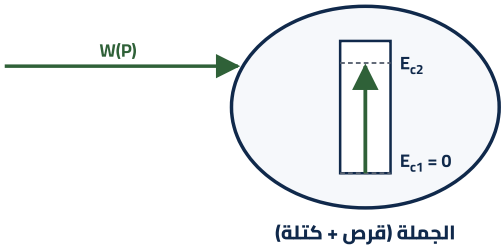
## حلّ التمرين 15

### توجيه منهجي

الجملة : (قرص + كتلة نقطية). ثقل القرص يؤثّر في G الواقع على المحور : عمله معدوم. الكتلة النقطية m هي الوحيدة التي ينزل مركزها، وارتفاع نزولها $R\cdot\cos\alpha$ عندما يصنع GA الزاوية $\alpha$ مع الشاقول. عزم العطالة : $J = \tfrac{1}{2} M R^2 + m R^2$.

1. $$J_\Delta = \tfrac{1}{2} M R^2 + m R^2 = (\tfrac{1}{2} \times 0{,}4 + 0{,}1) \times 0{,}12^2 = 0{,}3 \times 0{,}0144 = 4{,}32\times10^{-3}\ \text{kg·m}^2$$

2. من الوضع الأفقي ($\alpha = 90°$) إلى الزاوية $\alpha$ : ينزل الكتلة $m$ ارتفاعا $h = R \cos \alpha$.




$$E_c = W(P) = m\, g\, R \cos \alpha$$

3. أ)

$$E_c = 0{,}1 \times 10 \times 0{,}12 \times \cos 60° = 0{,}06\ J$$

ب)

$$\omega = \sqrt{2\, E_c / J_\Delta} = \sqrt{2 \times 0{,}06 / 4{,}32 \times 10^{-3}} \approx 5{,}27\ rad/s$$

ج)

$$v = R \cdot \omega = 0{,}12 \times 5{,}27 \approx 0{,}63\ m/s$$

4. أ) $\alpha = 0$ :

$$E_c = m\, g\, R = 0{,}1 \times 10 \times 0{,}12 = 0{,}12\ J$$

ب)

$$\omega = \sqrt{2 \times 0{,}12 / 4{,}32 \times 10^{-3}} \approx 7{,}45\ rad/s$$

ج)

$$v = R \cdot \omega = 0{,}12 \times 7{,}45 \approx 0{,}89\ m/s$$

## حلّ التمرين 16

**توجيه منهجي**

المحور يمرّ بالنقطة **O** من الحافة، لا بالمركز **G** : استعمل هويغنز بالمسافة **d = OG = R**. ثقل القرص يؤثّر في **G** : ينزل **G** من $G_1$ إلى $G_2$ بارتفاع **R**.

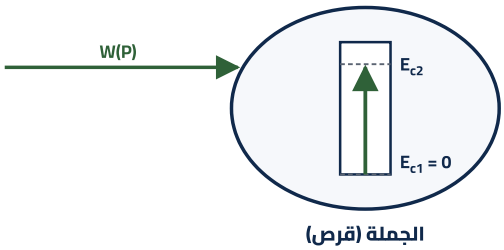
1. $$J_\Delta = J_{\Delta_G} + m R^2 = \tfrac{1}{2} m R^2 + m R^2 = (3/2)\, m R^2$$

$$J_\Delta = 1{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}1^2 = 7{,}5 \times 10^{-3}\ \text{kg·m}^2$$

2. $$W(P) = m g R = 0{,}5 \times 10 \times 0{,}1 = 0{,}5\ \text{J}$$

(عمل محرّك).

3.



الجملة (قرص)

$$0 + m g R = \tfrac{1}{2} J_\Delta \omega^2 = \tfrac{1}{2} \cdot (3/2)\, m R^2 \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{4 g / 3 R}$$

$$\omega = \sqrt{4 \times 10 / (3 \times 0{,}1)} = \sqrt{133} \approx 11{,}5\ \text{rad/s}$$

4. $$v_G = R \cdot \omega = 0{,}1 \times 11{,}5 \approx 1{,}15\ \text{m/s}$$

**انتبه : خطأ شائع**

ردّ فعل المحور في **O** يقطع المحور : عمله معدوم. أمّا ثقل القرص فعمله لا ينعدم لأنّ مركز عطالته **G** لا يقع على المحور.

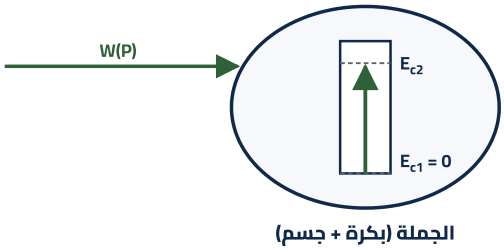
## المستوى 3 تمارين تعمّق

### حلّ التمرين 17

**توجيه منهجي**

الجملة (بكرة + جسم) : الجسم في حركة انسحابية والبكرة في حركة دورانية، فطاقتها الحركية مجموع الحدّين. الخيط لا ينزلق : $v = r\cdot\omega$. عملا قوتي الخيط على الجسم وعلى البكرة **يلغي أحدهما الآخر** ؛ يبقى عمل ثقل الجسم فقط (ثقل البكرة وردّ فعل المحور عملهما معدوم).

1. $$E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_\Delta (v/r)^2 = \frac{1}{2} \left( m + J_\Delta / r^2 \right) v^2$$

2. 


$$0 + m g h = \frac{1}{2} \left( m + J_\Delta / r^2 \right) v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2 m g h / \left( m + J_\Delta / r^2 \right)}$$

3. $J_\Delta / r^2 = 2\times10^{-2} / 10^{-2} = 2$ kg :

$$v = \sqrt{2 \times 1 \times 10 \times 2 / (1 + 2)} = \sqrt{13,3} \approx 3,65 \text{ m/s}$$

4. $$\omega = v / r = 3,65 / 0,1 \approx 36,5 \text{ rad/s}$$

5. جسم يسقط حرّا : $v = \sqrt{2 g h} = \sqrt{40} \approx 6,3$ m/s، أكبر من **3,65 m/s**. السبب : من الطاقة $m g h = 20$ J يذهب إلى الجسم $\frac{1}{2} m v^2 \approx 6,7$ J (الثلث)، والباقي $\approx 13,3$ J (الثلثان) يُختزن في دوران البكرة.

## حلّ التمرين 18

**توجيه منهجي**

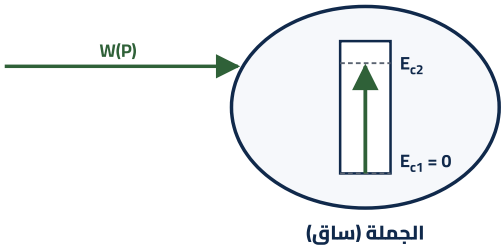
الساق تدور حول طرفها **O** : عزم عطالتها $J_\Delta = J_{\Delta_G} + m(L/2)^2$ المحور في **O** : ردّ الفعل عمله معدوم، ولا يعمل إلاّ الثقل المطبّق في **G**، الذي ينزل $(L/2)\sin\beta$.

1. $$J_\Delta = (1/12)\, m\, L^2 + m\,(L/2)^2 = (1/3)\, m\, L^2 = (1/3) \times 0{,}3 \times 0{,}36 = 3{,}6\times10^{-2}\ \text{kg·m}^2$$

2. ينزل **G** بالارتفاع $h = (L/2)\sin\beta$ :

$$W(P) = m\, g\, (L/2)\sin\beta = 0{,}3 \times 10 \times 0{,}3 \times \sin\beta = 0{,}9\sin\beta\ (J)$$

3.



الجملة (ساق)

$$0 + m\, g\, (L/2)\sin\beta = \tfrac{1}{2} \cdot (1/3)\, m\, L^2\, \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 3\, g \sin\beta / L \Rightarrow \omega = \sqrt{3\, g \sin\beta / L}$$

الكتلة **m** **اختفت** من العبارة : لا تتعلّق **ω** بالكتلة.

4. $$\omega = \sqrt{3 \times 10 \times \sin 40° / 0{,}6} = \sqrt{32{,}1} \approx 5{,}67\ \text{rad/s}$$

5. الوضع الشاقولي : $\sin\beta = 1 \Rightarrow \beta = 90°$ :

$$\omega = \sqrt{3\, g / L} = \sqrt{3 \times 10 / 0{,}6} = \sqrt{50} \approx 7{,}07\ \text{rad/s}$$

$$v_B = L \cdot \omega = 0{,}6 \times 7{,}07 \approx 4{,}24\ \text{m/s}$$

## حلّ التمرين 19

**توجيه منهجي**

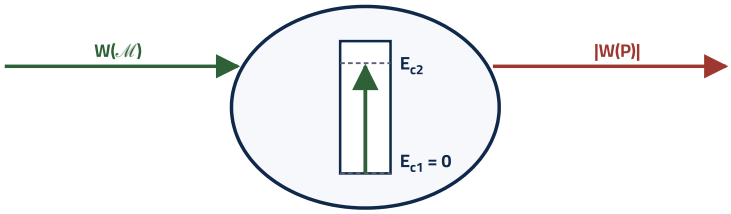
الجملة (أسطوانة + حمولة) : عزم المحرّك محرّك (+) وثقل الحمولة مقاوم (−) لأنّها تصعد. الحبل لا يمتدّ : $h = r\cdot\Delta\theta$ و$v = r\cdot\omega$. عملا قوتي الحبل يلغي أحدهما الآخر.

1. $\Delta\theta = h / r = 2 / 0{,}2 = 10\ \text{rad}$

2. $W(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cdot \Delta\theta = 25 \times 10 = 250\ \text{J}$

$W(P) = -\,m\,g\,h = -\,10 \times 10 \times 2 = -\,200\ \text{J}$

3.




الجملة (أسطوانة + حمولة)

$E_{c2} = \frac{1}{2}\left(m + J_\Delta / r^2\right) v^2 = 0 + 250 - 200 = 50\ \text{J}$

$J_\Delta / r^2 = 0{,}5 / 0{,}04 = 12{,}5\ \text{kg}$ :

$v = \sqrt{2 \times 50 / (10 + 12{,}5)} = \sqrt{4{,}44} \approx 2{,}11\ \text{m/s}$

$\omega = v / r = 2{,}11 / 0{,}2 \approx 10{,}5\ \text{rad/s}$

4. $P = \mathcal{M} \cdot \omega = 25 \times 10{,}5 \approx 2{,}6\times10^{2}\ \text{W}$

## حلّ التمرين 20

**توجيه منهجي**

الجملة (بكرة + $S_1$ + $S_2$) : الجسمان لهما نفس السرعة $v$ (الخيط لا يمتدّ) والبكرة $\omega = v/r$. أعمال الثقلين : $S_1$ ينزل (+) و$S_2$ يصعد (−). أعمال التوتّرات تلغي بعضها.

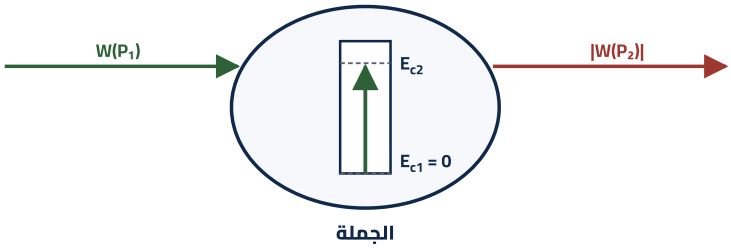
1. $$E_c = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v^2 + \tfrac{1}{2} J_\Delta (v/r)^2 = \tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + J_\Delta / r^2\right) v^2$$

2. $$W(P_1) = m_1\, g\, h = 0{,}3 \times 10 \times 0{,}75 = 2{,}25\ \text{J}$$

$$W(P_2) = -\,m_2\, g\, h = -\,0{,}2 \times 10 \times 0{,}75 = -\,1{,}5\ \text{J}$$

$$\Sigma W = (m_1 - m_2)\, g\, h = 0{,}75\ \text{J}$$

3.




$$J_\Delta / r^2 = 2{,}5\times10^{-3} / 2{,}5\times10^{-3} = 1\ \text{kg}$$ :

$$\tfrac{1}{2}(0{,}3 + 0{,}2 + 1)\, v^2 = 0{,}75 \Rightarrow v^2 = 1 \Rightarrow v = 1\ \text{m/s}$$

$$\omega = v / r = 1 / 0{,}05 = 20\ \text{rad/s}$$

4. $$v^2 = 2\, a\, h \Rightarrow a = 1 / (2 \times 0{,}75) \approx 0{,}67\ \text{m/s}^2$$

$$\Delta t = v / a = 1 / 0{,}67 = 1{,}5\ \text{s}$$

5. $J = 0$ :

$$v' = \sqrt{2\,(m_1 - m_2)\,g\,h \,/\, (m_1 + m_2)} = \sqrt{2 \times 0{,}75 \,/\, 0{,}5} = \sqrt{3} \approx 1{,}73 \text{ m/s}$$

أكبر من $1 \text{ m/s}$ : عزم عطالة البكرة **يبطّئ** الحركة لأنّ جزءا من الطاقة يذهب إلى دوران البكرة.

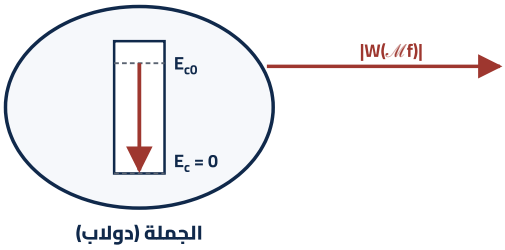
## حلّ التمرين 21

### توجيه منهجي

بعد فصل المحرّك، يعمل عزم الاحتكاك فقط (مقاوم) : $E_c = E_{c0} - \mathcal{M}_f\,\theta$. اكتب $E_c$ بدل $\frac{1}{2} J \omega^2$ لتحصل على علاقة بين $\omega^2$ و$\theta$ : **خطّ مستقيم** ميله $-2\mathcal{M}_f / J$. اقرأ البيان بدقّة (قيم الأوراق الشبكية).

1. عند $\theta = 0$ : $\omega_0^2 = 1000 \text{ (rad/s)}^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{1000} \approx 31{,}6 \text{ rad/s}$. المنحنى يقطع محور الفواصل عند $\theta = 50 \text{ rad}$ : الزاوية الكلّية الممسوحة حتى التوقّف.

2.




$$\tfrac{1}{2} J \omega_0^2 - \mathcal{M}_f \cdot \theta = \tfrac{1}{2} J \omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - (2\,\mathcal{M}_f / J) \cdot \theta$$

3. معامل التوجيه (القيمة المطلقة للميل) : $2\mathcal{M}_f / J = 1000 / 50 = 20 \text{ rad/s}^2$ :

$$\mathcal{M}_f = 20 \times J / 2 = 20 \times 0{,}1 / 2 = 1 \text{ N·m}$$

4.

$$N = \Delta\theta / 2\pi = 50 / 6{,}28 \approx 8 \text{ tr}$$

$$E_{c0} = \tfrac{1}{2} J \omega_0^2 = \tfrac{1}{2} \times 0{,}1 \times 1000 = 50 \text{ J}$$

تحقّق : $\mathcal{M}_f \cdot \Delta\theta = 1 \times 50 = 50 \text{ J}$ ✓.

## حلّ التمرين 22

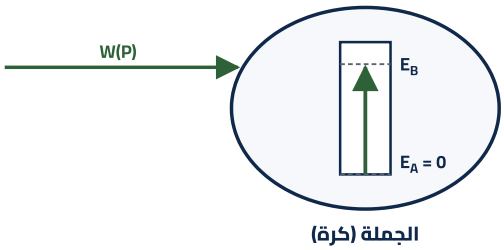
### توجيه منهجي

جسم في حركة انسحابية ودورانية معا : $E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$، وعدم الانزلاق يعطي $v = R \cdot \omega$. قوة الاحتكاك (نقطة التماس ساكنة لحظيا) وردّ الفعل الناظمي عملهما معدوم، فيبقى عمل الثقل $m g h$.

1. $$E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \cdot (2/5) m R^2 \cdot (v/R)^2 = \frac{1}{2} m v^2 + (1/5) m v^2 = (7/10) m v^2$$

2. القوى : الثقل $\vec{P}$ (عمله $+ m g h$) ؛ ردّ الفعل الناظمي $\vec{R_N}$ (عمله معدوم، عمودي على الانتقال) ؛ قوة الاحتكاك السكوني $\vec{f}$ (عملها معدوم لأنّ نقطة تطبيقها لا تنزلق).

3.




$$0 + m g h = (7/10) m v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{10 g h / 7}$$

$$v_B = \sqrt{10 \times 10 \times 0{,}7 / 7} = \sqrt{10} \approx 3{,}16 \text{ m/s}$$

$$\omega = v_B / R = 3{,}16 / 0{,}02 \approx 158 \text{ rad/s}$$

4. كُلة تنزلق دون احتكاك : $v = \sqrt{2 g h} = \sqrt{14} \approx 3{,}74 \text{ m/s}$، أكبر : في الكرة، جزء من الطاقة يذهب إلى الدوران. حصّة الدوران : $(1/5) m v^2 / ((7/10) m v^2) = 2/7 \approx 29\,\%$ من الطاقة الحركية الكلّية، والانسحاب $5/7 \approx 71\,\%$.

### انتبه : خطأ شائع

الكرة التي تتدحرج لها طاقة حركية **أكبر** من $\frac{1}{2}mv^2$ عند نفس السرعة : لذلك تكون سرعتها أصغر من سرعة جسم ينزلق دون احتكاك من نفس الارتفاع.

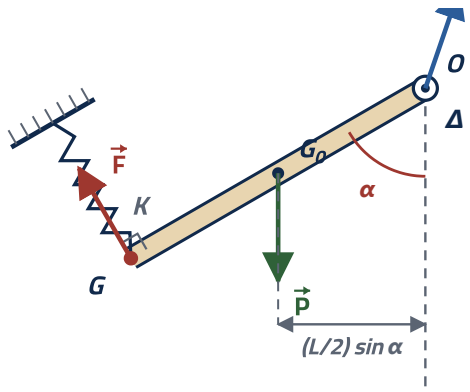
## حلّ التمرين 23

**توجيه منهجي**

**الجزء الأول :** توازن جسم قابل للدوران : $\Sigma \mathcal{M} = 0$ بالنسبة للمحور **(Δ)** (ردّ فعل المحور لا يظهر). **الجزء الثاني :** الجملة (الساق) وحدها، ولا يعمل إلاّ ثقلها لأنّ ردّ فعل المحور عمله معدوم. **الجزء الثالث :** ثلاث مراحل : **AB** (يعمل الاحتكاك)، **BC** (يعمل الثقل)، ثمّ المقذوف في الهواء (المركّبة الأفقية للسرعة ثابتة لأنّ الثقل شاقولي).

### الجزء الأول

1. القوى : الثقل $\vec{P}$ في $G_0$ (ذراعه $(L/2)\sin\alpha$)، قوة النابض $\vec{F}$ في **G** عمودية على الساق (ذراعها **L**)، وردّ فعل المحور $\vec{R}$ (عزمه معدوم).




القوى المؤثّرة على الساق

المنحى الموجب : منحى دوران الساق الذي يسبّبه $\vec{F}$ :

$$\Sigma \mathcal{M}_{\Delta} = F \cdot L - M g \cdot (L/2)\sin\alpha = 0 \Rightarrow F = \tfrac{1}{2} M g \sin\alpha$$

$$F = \tfrac{1}{2} \times 2 \times 10 \times \sin 60° \approx 8{,}66\ \text{N}$$

2. $F = K \cdot x$ ومنه $x = F/K$ :

$$E_{pe} = \tfrac{1}{2} K x^2 = \tfrac{1}{2} K (F/K)^2 = F^2 / (2K) \Rightarrow K = F^2 / (2\,E_{pe})$$

$$K = 8{,}66^2 / (2 \times 0{,}05) = 750\ \text{N/m}$$

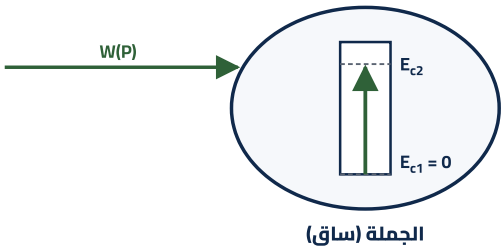
$$x = F / K = 8{,}66 / 750 \approx 1{,}2 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

## الجزء الثاني

1. مبرهنة هويغنز :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta_{G0}} + M\,(L/2)^2 = (1/12)\,M\,L^2 + (1/4)\,M\,L^2 = (1/3)\,M\,L^2$$

من الوضع $\alpha$ إلى الوضع الشاقولي ينزل $G_0$ بالارتفاع $h = (L/2)(1 - \cos\alpha)$ فعمل الثقل محرّك : $W(P) = M\,g\,(L/2)(1 - \cos\alpha)$.




$$0 + M\,g\,(L/2)(1 - \cos\alpha) = \tfrac{1}{2}\,J_{\Delta}\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}\cdot(1/3)\,M\,L^2\,\omega^2$$

$$\omega^2 = 3\,g\,(1 - \cos\alpha)/L \Rightarrow \omega = \sqrt{3\,g\,(1 - \cos\alpha)/L}$$

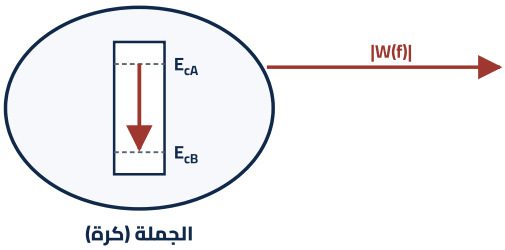
2. $$\omega = \sqrt{3 \times 10 \times (1 - 0{,}5)/0{,}4} = \sqrt{37{,}5} \approx 6{,}12\ \text{rad/s}$$

$$v_G = L \cdot \omega = 0{,}4 \times 6{,}12 \approx 2{,}45\ \text{m/s}$$

(نلاحظ أنّ $v_G^2 = 3\,g\,L\,(1 - \cos\alpha) = 6{,}0\ \text{m}^2/\text{s}^2$.)

## الجزء الثالث

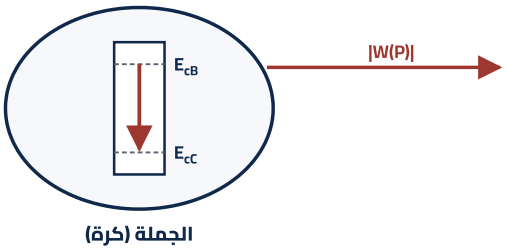
1. $v_A = v_G$ أي $v_A^2 = 6{,}0$. على **AB** : ردّ الفعل الناظمي والثقل عمودان على الانتقال (عملهما معدوم)، فلا يعمل إلاّ الاحتكاك.




$$\tfrac{1}{2} m v_A^2 - f \cdot AB = \tfrac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow f = m (v_A^2 - v_B^2) / (2\,AB)$$

$$f = 0{,}2 \times (6{,}0 - 4) / (2 \times 1) = 0{,}2\ N$$

2. على **BC** الأملس ردّ الفعل الناظمي عمودي على الانتقال : عمله معدوم. ترتفع الكرة بالارتفاع $r(1 - \cos\theta)$ فعمل الثقل مقاوم.




$$\tfrac{1}{2} m v_B^2 - m g r (1 - \cos\theta) = \tfrac{1}{2} m v_C^2$$

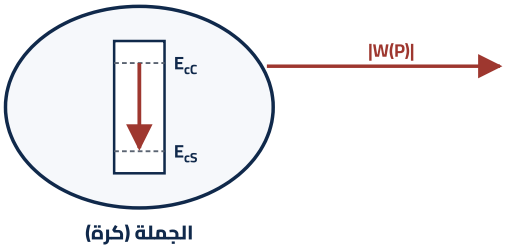
$$\cos\theta = 1 - (v_B^2 - v_C^2) / (2 g r) = 1 - (4 - 1) / (2 \times 10 \times 0{,}3) = 0{,}5$$

$$\theta = 60°$$

3. بعد **C** لا تخضع الكرة إلاّ لثقلها (شاقولي) : المركّبة الأفقية للسرعة ثابتة، وعند الذروة **S** السرعة أفقية :

$$v_S = v_C \cdot \cos 60° = 1 \times 0{,}5 = 0{,}5 \text{ m/s}$$

بين **C** و**S** يعمل الثقل (مقاوما) :




$$\tfrac{1}{2} m v_C^2 - m g H = \tfrac{1}{2} m v_S^2 \Rightarrow H = (v_C^2 - v_S^2) / (2 g)$$

$$H = (1 - 0{,}25) / 20 = 0{,}0375 \text{ m} \approx 3{,}8 \text{ cm}$$

4. الحركة الأفقية منتظمة بالسرعة $v_S = 0{,}5$ m/s :

$$ED = v_S \cdot \Delta t = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2 \text{ m}$$

تحقّق : **C** يرتفع عن الأرض $0{,}30 + r(1 - \cos\theta) = 0{,}30 + 0{,}15 = 0{,}45$ m، ومن $0{,}45 + 0{,}866\, t - 5\, t^2 = 0$ نجد $t \approx 0{,}4$ s ✓.

**انتبه : خطأ شائع**

زاوية نصف القطر مع الشاقول $\theta$ وزاوية شعاع السرعة مع الأفق متساويتان عند **C** (هنا $60°$). وعند الذروة السرعة **ليست معدومة** : لا تنعدم إلاّ مركّبتها الشاقولية.

## حلّ التمرين 24

### توجيه منهجي

جسم يتدحرج دون انزلاق : $E_c = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$ مع $\omega = v/R$. قوة الاحتكاك السكوني تؤثّر في نقطة تماس ساكنة لحظيا فعملها معدوم، وردّ الفعل الناظمي عمودي على الانتقال : لا يعمل إلاّ الثقل (مقاوما أثناء الصعود). نتوقّف الكرة لحظيا : سرعتها وسرعتها الزاوية معدومتان معا.

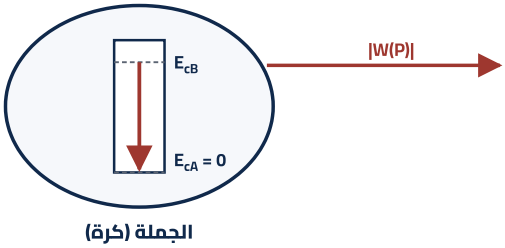
1. $\omega_0 = v_0 / R = 3 / 0{,}05 = 60 \text{ rad/s}$

$J = (2/5)\, m R^2 = 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}05^2 = 5 \times 10^{-4} \text{ kg·m}^2$

$E_{c0} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J \omega_0^2 = \frac{1}{2} \times 0{,}5 \times 9 + \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-4} \times 60^2 = 2{,}25 + 0{,}9 = 3{,}15 \text{ J}$

حصّة الدوران : $0{,}9 / 3{,}15 = 2/7 \approx 29\,\%$ (كما في $E_c = (7/10)\, m v^2$).

2.




نقطة تماس الكرة بالمستوي لا تنزلق : سرعتها لحظيا معدومة، فعمل قوة الاحتكاك السكوني معدوم. وردّ الفعل الناظمي عموديّ على الانتقال. يبقى عمل الثقل المقاوم.

3. $E_{c0} - m g \cdot d \sin\alpha = 0 \Rightarrow d = E_{c0} / (m g \sin\alpha)$

$d = 3{,}15 / (0{,}5 \times 10 \times 0{,}5) = 1{,}26 \text{ m}$

$h = d \sin\alpha = 1{,}26 \times 0{,}5 = 0{,}63 \text{ m}$

4. $E'_{c0} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J' \omega_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 (1 + 2/3) = (5/6) m v_0^2 = (5/6) \times 0{,}5 \times 9 = 3{,}75\ J$

$$d' = E'_{c0} / (m g \sin \alpha) = 3{,}75 / 2{,}5 = 1{,}5\ m$$

**d' > d** : لنفس الكتلة ونفس السرعة، الكرة المجوّفة تملك طاقة دورانية أكبر (كتلتها أبعد عن المحور)، فتصعد **أبعد**.

5. الجسم المنزلق لا يملك إلاّ طاقة الانسحاب :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m g d'' \sin \alpha \Rightarrow d'' = v_0^2 / (2 g \sin \alpha) = 9 / (2 \times 10 \times 0{,}5) = 0{,}9\ m$$

الترتيب : **d'' (0,9 m) < d (1,26 m) < d' (1,5 m)**. كلّما زادت حصّة الدوران من الطاقة الحركية الابتدائية صعد الجسم مسافة أكبر.

**انتبه : خطأ شائع**

لا تضف عملا لقوة الاحتكاك السكوني : الكرة تتدحرج **دون انزلاق**. ولا تنسَ أنّ المسافة **d** تُقاس على المستوي، وأنّ الارتفاع **$h = d \sin \alpha$**.

تابعوا الأستاذ

# الأستاذ تبيب حكيم

دروس، تمارين محلولة وفيديوهات شرح لتلاميذ الثانوي وفق المنهاج الجزائري

| | |
|---|---|
| المنصّة التعليمية | www.tebibphysique.com |
| يوتيوب | youtube.com/@tebibhakim3108 |
| تيك توك | tiktok.com/@tebibhakim2 |
| إنستغرام | instagram.com/physiquetebib |
| فيسبوك | facebook.com/hakimb.tebib |
| تيليغرام (القناة) | t.me/tebibphysique |
| تيليغرام (المجموعة) | t.me/tebib1971 |

الأستاذ تبيب حكيم — السنة الثانية ثانوي — رياضيات وتقني رياضي